

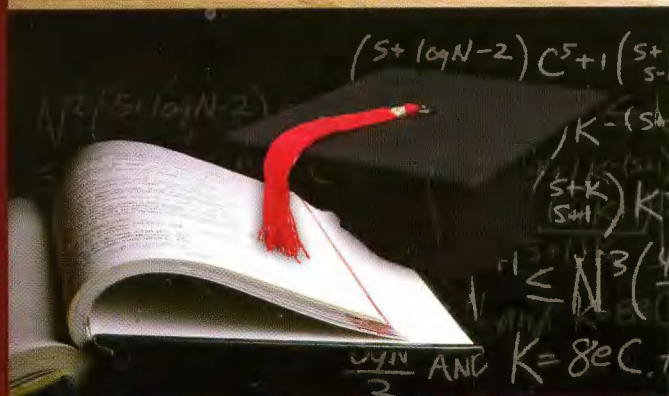


ПРИЛОЖЕНИЕ К ЖУРНАЛУ

КВАНТ

№6/2008

ЗАДАЧИ
ВСТУПИТЕЛЬНЫХ
ЭКЗАМЕНОВ



Б Ю Р О



КВАНТУМ

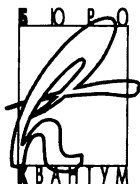
Приложение к журналу
«КВАНТ»

№6/2008

**ЗАДАЧИ
ВСТУПИТЕЛЬНЫХ
ЭКЗАМЕНОВ**

Составители

А.А.Егоров, В.А.Тихомирова



Москва
2008

УДК 373.167.1:[51+53]
ББК 22.1я721+22.3я721
3-11

Приложение
к журналу «Квант»
№6/2008

3-11 Задачи вступительных экзаменов/Составители А.А.Егоров, В.А.Тихомирова. – М.: Бюро Квантум, 2008. – 176 с.
(Приложение к журналу «Квант» №6/2008.)

ISBN 978-5-85843-084-1

В книге приводятся материалы вступительных экзаменов по математике и физике в различные вузы страны в 2008 году.

Для старшеклассников и выпускников средних школ, лицеев и гимназий, для слушателей подготовительных отделений и курсов, а также для тех, кто самостоятельно готовится к конкурсным экзаменам в вуз.



ББК22.1я721+22.3я721

ISBN 978-5-85843-084-1

© Бюро Квантум, 2008

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

4

Задачи Ответы

Государственный университет – Высшая школа экономики	5	99
Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ	9	105
МАТИ – Российский государственный технологический университет им. К.Э.Циолковского	15	107
Московский государственный институт электроники и математики (технический университет)	20	111
Московский государственный институт электронной техники (технический университет)	24	114
Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана	27	114
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова	35	118
Московский инженерно-физический институт	61	150
Московский педагогический государственный университет	64	150
Московский физико-технический институт (государственный университет)	71	152
Новосибирский государственный университет	78	163
Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена	82	164
Российский государственный университет нефти и газа им. И. М. Губкина	84	165
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет	89	171
Санкт-Петербургский государственный университет	97	173

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этом приложении к журналу «Квант» собраны вместе материалы вступительных экзаменов (и олимпиад) по математике и физике в различные вузы страны в 2008 году, которые обычно были распределены по трем номерам журнала.

Нам представляется, что эти материалы будут полезны прежде всего тем школьникам, которые готовятся к олимпиадам различного уровня – как Всероссийским, так и вузовским (последние, кстати, обычно похожи на соответствующие вступительные экзамены прошлых лет). Книга будет хорошим помощником и тем школьникам, кто собирается сосредоточить свои усилия на подготовке к единому государственному экзамену. Ведь гарантией успешной сдачи единого экзамена, содержащего довольно непростые и нестандартные задачи, является не натаскивание на экзаменационные варианты прошлых лет, а углубленное изучение предмета. Оно включает в себя систематическую работу с хорошим задачником, решение и обсуждение с друзьями, учителями, преподавателями кружков и курсов различных новых сюжетов, идей и подходов, которые встречаются, в частности, и в материалах вступительных экзаменов прошлых лет.

Мы надеемся, что предлагаемый сборник принесет пользу всем нашим читателям.

Желаем успехов!

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ – ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

МАТЕМАТИКА

Математический факультет

Олимпиада

1 тур

1. В математическом кружке более 23%, но менее 24% участников – девочки. Каково наименьшее возможное количество участников в этом кружке?

2. В треугольной пирамиде $SABC$ длины всех ребер измеряются целыми числами. Известно, что $AB = 3$, $BC = 7$, $SA = 14$, $SC = 6$. Найдите длину ребра SB .

3. Вася и Петя бегают на коньках по кругу с постоянными скоростями. Когда они бегут в одном направлении, Вася догоняет Петю каждые 12 минут, а когда они бегут навстречу друг другу, то встречаются каждые 4 минуты. За сколько минут Вася пробегает круг?

4. Найдите наибольший общий делитель чисел 8651 и 9073.

5. Прямоугольник со сторонами 11 и 4 разделен диагональю на два треугольника, в каждый из которых вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания этих окружностей с диагональю.

6. Сколькими способами среди вершин данного правильного 18-угольника можно выбрать три вершины так, чтобы образованный ими треугольник был тупоугольным?

7. Два зеркала образуют двугранный угол в 2° . Сколько раз отразится в этих зеркалах луч света, выпущенный параллельно одному из зеркал и перпендикулярно ребру двугранного угла?

8. Площадь треугольника равна $4\sqrt{14}$, радиус вписанной окружности равен $\frac{4}{7}\sqrt{14}$, а радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжения двух других сторон, равен $2\sqrt{14}$. Найдите длину этой стороны.

9. Найдите x , если известно, что верны ровно два из следующих трех утверждений:

$$x^2 - 2x \geq 0, \quad x^2 + 2x \leq 0, \quad x^2 - 4 \leq 0.$$

10. Какой остаток при делении на 12 имеет сумма

$$2^5 + 3^5 + 4^5 + \dots + 11^5 ?$$

11. Основания равнобокой трапеции $ABCD$ имеют длины $AB = 15$, $CD = 17$. Точка P лежит на AB , а точка Q — на CD так, что отрезок PQ перпендикулярен основаниям. Найдите длину отрезка AP , если отношение площадей

$$S_{APQD} : S_{PBCQ} = 11 : 21.$$

12. Чему равна сумма кубов корней уравнения

$$x^2 - 4x + 1 = 0 ?$$

13. Из середины ребра $A'B'$ куба $ABCD A'B'C'D'$ провели прямую, которая пересекает прямую CD в некоторой точке Q , а также пересекает прямую, проходящую через середины ребер AD и DD' . Найдите длину отрезка DQ , если сторона куба равна 18.

14. Прямая AB касается параболы $y = x^2 - 2x + 7$ в точке A с абсциссой 2. Прямая CD параллельна AB и пересекает эту параболу в точках C и D . Найдите ординату точки D , если абсцисса точки C равна 5.

15. Сколько различных вещественных корней у многочлена

$$\frac{27}{4}x^4 - 15x^3 - 3x^2 + 24x - \frac{4}{9} ?$$

(Выберите ответ из списка: 0, 1, 2, 3, 4, 5.)

16. Какое максимальное количество точек пересечения — при различных значениях параметра a — могут иметь графики функций $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{5}x + a$?

17. Сколько натуральных делителей у числа 1568 (включая единицу и само число)?

18. Найдите наименьшее натуральное число, одновременно дающее остаток 2 при делении на 5, остаток 5 при делении на 6 и остаток 6 при делении на 7.

19. Вычислите 200-ю цифру после запятой в десятичной записи числа $\frac{1}{3}(4 + \sqrt{15})^{1001}$.

20. Сколько существует строго возрастающих последовательностей (a_n) натуральных чисел таких, что $a_{a_n} = 2n + 100$ и $a_1 = 35$?

1. У Сережи имеется шесть отрезков, причем из любых трех из них можно сложить треугольник. Обязательно ли из этих шести отрезков можно сложить тетраэдр?

2. Решите следующее уравнение, которое неправильно решает одна из популярных математических программ:

$$\arcsin\left(2t\sqrt{1-t^2}\right) = 2\arcsin t.$$

3. В треугольнике ABC угол A вдвое больше угла C , а точка O – центр описанной окружности. На продолжении отрезка OA за точку A взяты две точки: точка P – пересечение прямых OA и BC и точка N такая, что углы ABN и OBC равны. Известно, что $PN = PB$. Найдите угол C .

4. График функции $y = f(x)$ является ломаной, состоящей из 50 звеньев. Известно, что область значений этой функции содержится в ее области определения. Может ли график функции $y = f(f(x))$ быть а) ломаной, состоящей более чем из 2008 звеньев; б) отрезком?

5. Угол обзора Таниного фотоаппарата равен 90° , т.е. Таня фотографирует произвольный прямой угол (граница угла тоже попадает на снимок). В городе несколько небоскребов. Таня заметила, что с каждого из них она может сфотографировать не более 5 других небоскребов. (Небоскребы считаются точками на плоскости.) Какое наибольшее число небоскребов могло быть в городе, если никакие три из них не лежат на одной прямой?

6. Воинственная страна Дендралия имеет 10 военных баз за рубежом. Каждую такую базу надо соединить секретной телефонной линией с одной из N телефонных станций внутри страны, а эти телефонные станции – несколькими телефонными линиями между собой. По соображениям секретности требуется, чтобы каждую пару точек этой телефонной сети соединяла единственная цепочка линий (возможно, проходящая через несколько телефонных станций). Кроме того, в каждой телефонной станции должно сходиться не менее трех линий (иначе ее строительство не нужно). Институт четных исследований должен подготовить все возможные проекты таких сетей с четными значениями N , а Центр нечетных проблем – с нечетными N . а) Каких проектов получится больше? б) На сколько?

(Авторы задач: 1 и 2 – С.Маркелов, 3 – А.Кустарев, 4 – И.Яценко, 5 – А.Канель-Белов, 6 – И.Артамкин)

Устный экзамен

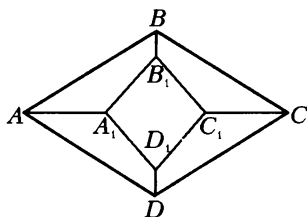
1. Найдите кратчайшее расстояние от точки на окружности единичного радиуса с центром в начале координат до точки на графике квадратного трехчлена, пересекающего ось ординат при $y = -2$, а ось абсцисс — при $x = \pm 2$.

2. Найдите наименьшее $n \geq 2008$, для которого система из n уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 1 = x_1 x_2, \\ x_2 - 1 = x_2 x_3, \\ x_3 - 1 = x_3 x_4, \\ \dots\dots\dots \\ x_n - 1 = x_n x_1 \end{cases}$$

имеет действительное решение.

3. Существует ли многогранник, который можно параллельно спроектировать на плоскость так, чтобы проекции вершин и ребер образовали представленную на рисунке фигуру? На чертеже изображены все вершины и все ребра, никаких нало-



жений не происходит, $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — ромбы с общим центром, A_1 и C_1 лежат на прямой AC , B_1 и D_1 лежат на прямой BD , $AC > BD$, $A_1C_1 < B_1D_1$. Приведите пример такого многогранника и такой проекции или докажите, что их не существует.

4. Известно, что 26-значное число

21982145917308330487013369

является 13-й степенью некоторого натурального числа m . Найдите это m .

5. Последовательные стороны выпуклого четырехугольника (при обходе по часовой стрелке) равны 7, 4, 2 и 3. Может ли его площадь быть равна 13? Приведите пример такого четырехугольника или докажите, что его не существует.

Публикацию подготовили
А.Городенцев, Ю.Кудряшов, И.Яценко

**ИНСТИТУТ КРИПТОГРАФИИ, СВЯЗИ
И ИНФОРМАТИКИ АКАДЕМИИ ФСБ РФ**

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Альпинист совершает восхождение на вершину горы высотой 5420 метров. За первый час он преодолел 800 метров подъема, а затем за каждый последующий час преодоленная им высота уменьшалась на 50 метров. Сеансы связи с базовым лагерем были предусмотрены в начале каждого часа. Через сколько часов после начала восхождения альпинист сообщит о покорении вершины?

2. Решите неравенство

$$(x^2 - 2x)(2x - 2) - \frac{9(2x - 2)}{(x^2 - 2x)} \leq 0.$$

3. Решите уравнение

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 4|\sin x| = 2 + \sqrt{2}(1 - |\sin x|).$$

4. Решите неравенство

$$\left|\frac{1-x}{3x+1}\right| - 1 < \left|\frac{x+1}{1-3x}\right|.$$

5. В равнобоочной трапеции основания равны 8 см и 12 см соответственно, а длина отрезка, соединяющего точку пересечения диагоналей с серединой боковой стороны трапеции, равна 6 см. Найдите угол между диагональю и основанием трапеции.

6. Для каждого действительного значения параметра a решите уравнение

$$5 - 2a = |3x - a| - 3x.$$

Вариант 2

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Решите неравенство $\frac{\sqrt{4+3x-x^2}}{4x+1} \geq \frac{\sqrt{4+3x-x^2}}{x-5}$.

2. Решите уравнение $\sqrt{13x+6} = 2\sqrt{x-3} + 3\sqrt{x-2}$.

3. Решите уравнение

$$\left(42 - 6^{\frac{2x-1}{x}}\right)^{\frac{x}{x+1}} = 6.$$

4. Решите уравнение $\log_4 \left(\cos 2x - \frac{1}{10} \right) + 1 = \log_2 \operatorname{tg} x$.

5. В правильной треугольной пирамиде длина стороны основания равна $4\sqrt{3}$, длина бокового ребра равна $4\sqrt{2}$. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду.

6. В спортивном соревновании первый спортсмен стартует на 8 с раньше преследующего его второго спортсмена. Когда второй спортсмен преодолел половину дистанции, первому оставалось бежать до финиша еще 19 с, но через 5 с второй спортсмен его настиг. За какое время преодолевают всю дистанцию первый и второй спортсмены?

Вариант 3

(олимпиада-2008, все факультеты)

1 (3 балла). Сравните числа

$$\frac{2,0000004}{(1,0000004)^2 + 2,0000004} \quad \text{и} \quad \frac{2,0000002}{(1,0000002)^2 + 2,0000002}.$$

2 (3 балла). Решите неравенство

$$\log_{x-1}(x+1) > \log_{x^2-1}(x+1).$$

3 (4 балла). Сколько натуральных чисел от 1 до 222222 содержат в своей десятичной записи цифру 0?

4 (4 балла). Решите уравнение

$$2\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x - 2\sin x - 3\cos x + 5 = 0.$$

5 (4 балла). В трапеции $ABCD$ прямая, проведенная через вершину B и середину диагонали AC , пересекает большее основание AD трапеции в точке N , причем $AN : ND = 1 : 2$.

Прямая CN пересекает диагональ BD в точке K . Найдите отношение площади треугольника CKD к площади трапеции.

6 (4 балла). Два спортсмена начали бег по круговой дорожке в одном направлении из одной точки. После того как они повстречались во время движения 4 раза (не считая момента начала движения), второй спортсмен, бегущий медленнее, развернулся и побежал в обратном направлении. Встретившись после этого еще 7 раз, оба спортсмена оказались в точке старта. Сколько кругов пробежал каждый из спортсменов, если вместе они пробежали 35 кругов?

7 (5 баллов). В центре квадрата со стороной 3 расположен другой квадрат со стороной 1 так, что стороны квадратов параллельны. Во внешнем квадрате в серединах двух противоположных сторон сделаны отверстия. Саша и Миша закатывают внутрь квадрата шар через одно из отверстий (это отверстие они закрывают) и ждут, когда шар выкатится через другое отверстие, считая число ударов шара о стенки обоих квадратов. Предполагается, что при ударе о стенку угол «падения» равен углу «отражения» и что шар ни разу не ударялся об углы квадратов. Саша насчитал 15 ударов, а Миша 16. Кто из мальчиков заведомо неправ и почему?

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. За время $t_1 = 1$ с от начала движения тело прошло путь $s = 10$ м, при этом его скорость, не меняя направления, увеличилась в 4 раза. Найдите ускорение тела a .

2. Открытую вертикальную стеклянную трубку длиной $L = 1000$ мм наполовину погружают в ртуть. Затем верхний конец трубки закрывают пальцем и вынимают. Какой длины h столбик ртути останется в трубке? Атмосферное давление $p_0 = 750$ мм рт.ст. $\approx 100,0$ кПа. Температура постоянна. Плотность ртути $\rho = 13600$ кг/м³, ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с².

3. Три точечных заряда, q_1, q_2 и q_3 расположены в вакууме в вершинах равностороннего треугольника с длиной стороны $l = 3$ см, причем $q_1 = q_2 = 8$ нКл, $q_3 = 1$ нКл (рис. 1). С какой результирующей силой F (по модулю) заряды q_1 и q_2 действуют на заряд q_3 ? Постоянная $k = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

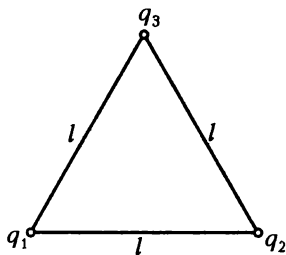


Рис. 1

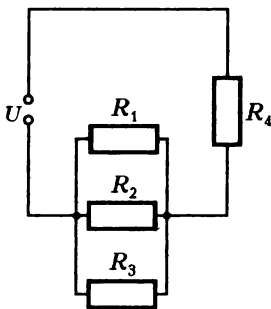


Рис. 2

4. В цепи, изображенной на рисунке 2, резисторы имеют такие сопротивления: $R_1 = 8 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$, $R_3 = 4 \text{ Ом}$, $R_4 = 2 \text{ Ом}$. На вход цепи подано напряжение $U = 36 \text{ В}$. Найдите разность потенциалов U_4 на концах проводника с сопротивлением R_4 .

5. Расстояние от предмета до рассеивающей линзы $l_1 = 20 \text{ см}$, а от линзы до изображения $l_2 = 10 \text{ см}$. Найдите фокусное расстояние линзы F .

Вариант 2

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Пуля, вылетевшая вертикально вверх со скоростью $v_0 = 1000 \text{ м/с}$ из расположенной у поверхности земли винтовки, упала на землю со скоростью $v = 50 \text{ м/с}$. Какая работа A_c была совершена силой сопротивления воздуха, если масса пули $m = 10 \text{ г}$?

2. Плавающий куб погружен в ртуть на $k_1 = 1/4$ часть своего объема. Какая часть k_2 объема куба будет погружена в ртуть, если поверх ртути налить слой воды, полностью закрывающей куб? Плотность ртути $\rho_1 = 13600 \text{ кг/м}^3$, плотность воды $\rho_2 = 1000 \text{ кг/м}^3$.

3. Плоский воздушный конденсатор емкостью $C = 1 \text{ мкФ}$ соединили с источником напряжения, в результате чего конденсатор приобрел заряд $q = 10 \text{ мкКл}$. Расстояние между пластинами конденсатора $d = 5 \text{ мм}$. Определите напряженность поля E внутри конденсатора.

4. В воду массой $m_1 = 1 \text{ кг}$ при температуре $t_1 = 20^\circ \text{C}$ положили частично растаявший комок снега (смесь воды и льда при температуре $t_2 = 0^\circ \text{C}$) общей массой $m_2 = 0,25 \text{ кг}$. Когда

весь снег растаял, установилась температура $t_3 = 5^\circ\text{C}$. Определите массу льда m_3 в комке снега. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 330 \text{ кДж/кг}$, удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}$. Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

5. Источник тока с ЭДС $\mathcal{E} = 6 \text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r = 1 \text{ Ом}$ подключен к катушке, имеющей индуктивность L и сопротивление $R_1 = 2 \text{ Ом}$. При включении в цепь параллельно катушке сопротивления $R_2 = R_1$ магнитная энергия тока, текущего в цепи, уменьшилась на $W = 1,75 \text{ Дж}$. Найдите индуктивность катушки L . Индуктивность соединительных проводов пренебрежимо мала.

Вариант 3

(олимпиада-2008, все факультеты)

1 (4 балла). Легкая нерастяжимая нить длиной $l = 30 \text{ см}$ одним своим концом закреплена на дне цилиндрического вертикального сосуда с водой, а к другому ее концу привязан маленький деревянный шарик (рис.3). Расстояние между точкой закрепления нити и центром дна сосуда $r = 20 \text{ см}$. Сосуд стали вращать вокруг его оси симметрии с постоянной угловой скоростью, при этом шарик остался в воде, а нить отклонилась от вертикали на угол $\alpha = 30^\circ$. На каком расстоянии r_1 от оси вращения будет находиться шарик и чему равна угловая скорость вращения сосуда ω ? Ускорение свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

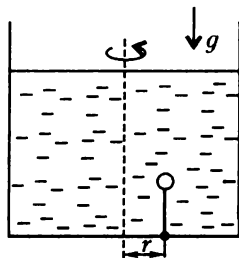


Рис. 3

2 (3 балла). Невесомый блок укреплен на вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы $\alpha = 30^\circ$ и $\beta = 45^\circ$. Гири равной массы соединены нитью, перекинутой через блок. Коэффициент трения гирь о наклонные плоскости $\mu = 0,1$. Найдите ускорение a , с которым движутся гири. Трением в оси блока, массой нити и ее растяжением пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

3 (4 балла). В вертикально расположенном теплоизолированном цилиндре, легкий поршень которого удерживается в неподвижном состоянии двумя одинаковыми гирями, находится идеальный одноатомный газ (рис.4). Начальная температура газа T_1 . Давление вне цилиндра равно нулю. На сколько

изменится температура газа, если одну из гирь снять, а затем, подождав установления равновесия, поставить обратно? Поршень скользит в цилиндре без трения.

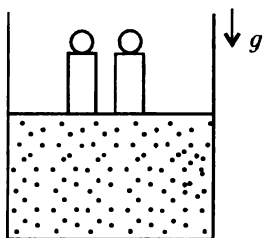


Рис. 4

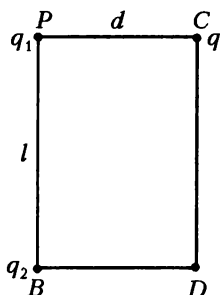


Рис. 5

4 (3 балла). В вершинах P и B прямоугольника $PCDB$ расположены точечные заряды $q_1 = 2$ мкКл и $q_2 = 5$ мкКл (рис.5). Какую работу A нужно совершить, чтобы переместить точечный заряд $q = 10$ нКл из точки C в точку D , если длины отрезков PB и PC равны $l = 40$ см и $d = 30$ см соответственно? Постоянная $k = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

5 (4 балла). Источник ЭДС замкнут двумя последовательно соединенными резисторами сопротивлениями r_1 и r_2 . Если вольтметр подключить к резистору сопротивлением r_1 , то он покажет $U_1 = 6$ В, если его подключить к r_2 , то он покажет $U_2 = 4$ В, а если вольтметр подключить к источнику, то он покажет $U_3 = 12$ В. Найдите падения напряжения U_{10} и U_{20} на резисторах сопротивлениями r_1 и r_2 в цепи без вольтметра. Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало.

6 (3 балла). Чайка сидит на спокойной поверхности моря. К ней на глубине $h = 5$ м подплывает акула. На какое расстояние L по горизонтали подплывет акула к чайке, прежде чем та сможет заметить акулу? Абсолютный показатель преломления воды $n = 1,33$, абсолютный показатель преломления воздуха считать равным единице.

7 (3 балла). Сосуд объемом $V = 40$ л разделен перегородкой на две части. В одной части находится $m_1 = 10$ г гелия с молярной массой $M_1 = 4$ г/моль, в другой — $m_2 = 50$ г неона с молярной массой $M_2 = 20$ г/моль. Температура каждого из газов $T = 385$ К. Найдите давление p смеси газов, получившейся после удаления перегородки. Универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль · К).

Публикацию подготовили А.Леденев, А.Пичкун

МАТИ – РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К.Э.ЦИОЛКОВСКОГО

МАТЕМАТИКА

Окружной этап Московской математической олимпиады

Первый тур

1. Определите остаток от деления 4^{2008} на 7.
2. Решите уравнение

$$5 \cos 2x + 11 \sin x - 8 + 7 \cos 2x + \sin 2x - 1 = 0.$$

3. При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{x^2 - ax + 4}{x - 3} = 0$$

имеет единственное решение?

4. Укротитель хищных зверей хочет вывести на арену цирка трех львов и четырех тигров; при этом нельзя, чтобы два тигра шли друг за другом. Сколькими способами он может расположить зверей?

5. Каждый из участников международной конференции владеет английским, французским или немецким языком: 10 участников говорят по-английски, 10 – по-немецки и 7 – по-французски. Кроме того, 5 человек владеют английским и немецким, 3 – английским и французским, 4 – французским и немецким. Два участника конференции знают все три языка. Сколько найдется среди участников конференции различных пар людей, которые не смогут объясниться друг с другом?

6. К окружности из точки A , лежащей вне круга, проведены две касательные: AB и AC (B и C – точки касания). В треугольник ABC вписан круг, центр которого находится на расстоянии 15 см от центра первой окружности и на расстоянии 10 см от точки A . Найдите длину отрезка BC .

Второй тур

1. Делится ли на 9 число $10^{2008} - 2008$?
2. Разложите на множители не выше второй степени многочлен $x^6 + 1$.

3. Имеется 9 кошельков, в каждом из которых лежит по 5 монет. В восьми кошельках монеты настоящие, массой по 10 граммов, в одном – фальшивые, массой в 9 граммов. Кроме того, есть двухчашечные весы, с помощью которых можно измерить разницы в массе монет, положенных на две чаши весов, с точностью до одного грамма, если только эта разность не превосходит 5 граммов. Как с помощью одного взвешивания определить, в каком из кошельков лежат фальшивые монеты?

4. Периметр равнобедренного треугольника ABC равен 36 см. При каких значениях длины основания AC точка пересечения высот лежит внутри треугольника, но выше средней линии, соединяющей середины боковых сторон?

5. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sin \sqrt{x(a-x)} = 1$$

имеет 2008 решений?

6. Найдите наибольшее значение функции

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{(x-y)^4}{4}$$

в квадрате $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

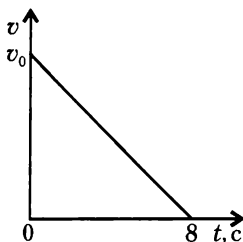


Рис. 1

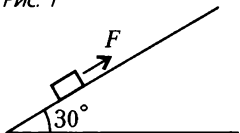


Рис. 2

1. При экстренном торможении скорость автомобиля изменялась, как показано на рисунке 1. Найдите тормозной путь, если $v_0 = 144$ км/ч:

- 1) 100 м; 2) 160 м; 3) 240 м;
4) 320 м; 5) 500 м.

2. С каким ускорением движется по гладкой наклонной плоскости тело массой 2 кг под действием силы $F = 15$ Н, если наклонная плоскость составляет угол 30° с горизонталью, а направление силы показано на рисунке 2:

- 1) 1 м/с^2 ; 2) $2,5 \text{ м/с}^2$;
3) $3,5 \text{ м/с}^2$; 4) 5 м/с^2 ;
5) $7,5 \text{ м/с}^2$?

3. Шарик соскальзывает без начальной скорости по желобу, который переходит в вертикальную петлю радиусом R (рис.3). Начальная высота шарика $2R$. Найдите ускорение шарика в нижней точке петли, если силами трения можно пренебречь:

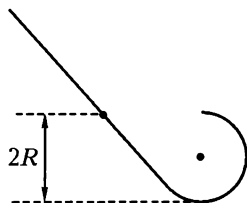


Рис. 3

- 1) g ; 2) $2g$; 3) $3g$; 4) $4g$; 5) 0.

4. Во сколько раз изменится плотность идеального газа при нагревании от 20°C до 80°C при постоянном давлении:

- 1) увеличится в 4 раза; 2) уменьшится в 4 раза;
3) уменьшится в 1,2 раза; 4) уменьшится в 1,6 раз;
5) уменьшится в 2 раза?

5. Расширяясь, одноатомный идеальный газ совершил работу 600 Дж. В ходе процесса внутренняя энергия газа увеличилась на 900 Дж. В каком процессе это возможно:

- 1) в изохорном; 2) в изобарном; 3) в изотермическом; 4) в адиабатном; 5) это невозможно ни в одном из процессов 1–4?

6. Для освещения зала используют лампы двух типов: 20 ламп сопротивлением 800 Ом каждая и 10 ламп сопротивлением 240 Ом каждая. Все лампы соединены параллельно. Пренебрегая сопротивлением проводов, найдите общее сопротивление ламп:

- 1) 15 Ом; 2) 20 Ом; 3) 25 Ом; 4) 50 Ом; 5) 185 Ом.

7. Два одноименных точечных заряда находятся на расстоянии 1 м друг от друга и отталкиваются с силой 1 Н. Найдите работу электрического поля при увеличении расстояния между зарядами в 4 раза:

- 1) 0,75 Дж; 2) 1,5 Дж; 3) 3 Дж; 4) 4 Дж; 5) 4,5 Дж.

8. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией 0,04 Тл. Найдите модуль ускорения электрона в тот момент, когда его скорость направлена перпендикулярно линиям индукции и равна 10^6 м/с, если масса электрона $9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, заряд электрона $-1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл:

- 1) 10^{15} м/с²; 2) $3 \cdot 10^{15}$ м/с²; 3) $7 \cdot 10^{15}$ м/с²;
4) 10^{16} м/с²; 5) 0.

9. В колебательном контуре происходят электромагнитные колебания с циклической частотой 3140 с^{-1} . Какое расстояние пройдет в воздухе волна, излучаемая контуром, за время, равное одному периоду колебаний, если скорость электромагнитной волны в воздухе $3 \cdot 10^8$ м/с:

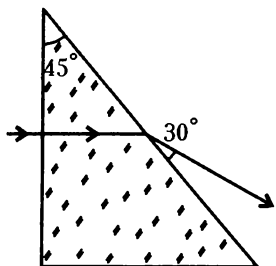


Рис. 4

- 1) 6 км; 2) 31 км; 3) 63 км;
4) 314 км; 5) 600 км?

10. Ход луча через призму показан на рисунке 4. Найдите показатель преломления призмы, если снаружи находится воздух и $n_{\text{возд}} = 1$:

- 1) 1,225; 2) 1,375; 3) 1,414;
4) 1,560; 5) 1,732.

Вариант 2

(олимпиада-2008)

1. Материальная точка движется вдоль оси OX . Зависимость проекции ее скорости на эту ось от времени изображена на рисунке 5. На каком расстоянии от начального положения окажется эта точка в момент времени $t = 15$ с?

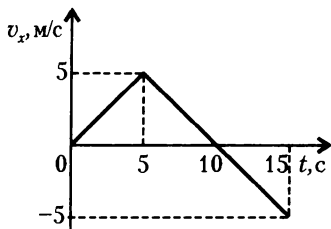


Рис. 5

2. Один моль одноатомного идеального газа в ходе некоторого процесса получил 800 Дж тепла. Температура газа повысилась на 50 К. Увеличился или уменьшился объем газа в этом процессе?

Ответ обоснуйте. Универсальная газовая постоянная $R = 8,3$ Дж/(моль · К).

3. Ученик, выполняя лабораторную работу, неправильно собрал схему для измерения сопротивления лампочки (рис.6).

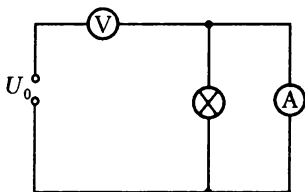


Рис. 6

Напряжение источника равно $U_0 = 12$ В, вольтметр показывает 11 В, амперметр показывает 0,2 А. Найдите сопротивление лампочки, если сопротивление вольтметра 50 Ом. Что покажут амперметр и вольтметр, если их поменять местами?

4. В колебательном контуре, состоящем из конденсатора и катушки индуктивности, происходят гармонические колебания. Энергия магнитного поля катушки индуктивности изменяется по закону $W_L(t) = 2,5 \cdot 10^{-3} (1 - \cos 2\omega t)$ (Дж). Найдите максимальное значение заряда кон-

денсатора этого контура, если емкость конденсатора $C = 1 \text{ мкФ}$.

5. Клин с углом $\alpha = 30^\circ$ стоит в углу, образованном гладким полом и гладкой вертикальной стеной (рис.7). На клин кладут брусок массой 5 кг, на который сразу начинает действовать сила F , направленная параллельно поверхности клина. Найдите силу давления клина на стену, если $F = 50 \text{ Н}$. Коэффициент трения между бруском и поверхностью клина $\mu = 0,3$.

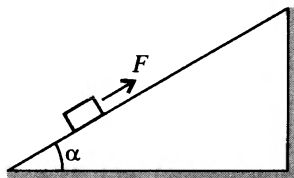


Рис. 7

6. Воздушный конденсатор подключен к источнику ЭДС через резистор сопротивлением $R = 0,5 \text{ кОм}$ (рис.8). ЭДС источника $\mathcal{E} = 200 \text{ В}$, внутреннее сопротивление источника $r = 1 \text{ кОм}$, емкость конденсатора $C_0 = 0,1 \text{ мкФ}$. Ключ K был замкнут в течение достаточно длительного времени, затем ключ разомкнули и пластины конденсатора раздвинули, причем заряд пластин не изменился. Найдите работу по раздвижению пластин конденсатора, если расстояние между ними было увеличено в 2 раза. После того как пластины раздвинули, ключ K снова замыкают. Какое количество теплоты выделится в резисторе после замыкания ключа? Оцените время, за которое происходит установление заряда на конденсаторе в этой цепи.

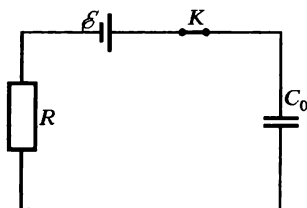


Рис. 8

Публикацию подготовили Н.Беклемишев, А.Браун,
Н.Виск, Л.Муравей, Г.Никулин, А.Симонов

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ
ЭЛЕКТРОНИКИ И МАТЕМАТИКИ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)**

МАТЕМАТИКА

Задачи окружного этапа Московской региональной олимпиады

1. Решите уравнение $(x - 2) \log_3 x^2 = 2|x - 2|$.

2. Прямоугольная таблица содержит 2008 ячеек. Число столбцов в таблице не меньше двух и не превышает числа строк. При каком количестве столбцов таблицу можно заполнить числами так, чтобы произведение чисел в каждом столбце было положительным, а в каждой строке – отрицательным?

3. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ($AB = 4$, $AD = 6$, $AA_1 = 5\sqrt{6}$). Плоскость α , содержащая диагональ BD_1 , пересекает ребро AA_1 таким образом, что сечение параллелепипеда этой плоскостью имеет наименьший периметр. Определите, какой угол образуют плоскость α и плоскость основания $ABCD$.

4. Пусть числа x и y удовлетворяют соотношению $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$. Найдите все значения, которые может принимать выражение $4x + 3y$.

5. Функция $f(x)$, определенная при всех $x \neq 0$, удовлетворяет уравнению

$$f(2x) + 3f\left(\frac{1}{2x}\right) = x^2.$$

Найдите: 1) $f(1)$; 2) $f(x)$.

6. Найдите все значения a , при которых числа $\frac{a+3}{a+1}$ и $\frac{2a+15}{a+4}$ являются целыми.

7. В правильном многоугольнике, имеющем 2000 вершин, ровно 801 вершина окрашена в красный цвет. Докажите, что существуют три красные вершины, которые являются вершинами равнобедренного треугольника.

Вариант 1

1. Источник с внутренним сопротивлением $r = 2,0$ Ом замкнули на резистор сопротивлением $R = 10$ Ом. Определите ЭДС источника, если по цепи течет ток $I = 0,50$ А.

2. Определите, какое количество теплоты выделится, если камень массой $m = 2,0$ кг отпустить без начальной скорости с высоты $h = 25$ м.

3. При адиабатическом сжатии одного моля одноатомного идеального газа, находящегося при нормальных условиях, была совершена работа $A = 300$ Дж. Определите, до какой температуры нагрелся газ. Универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль · К).

4. Напряжение на конденсаторе в колебательном контуре изменяется по закону $u = 50 \cos 10^5 t$ (В), а максимальное значение энергии магнитного поля катушки $W = 125$ мкДж. Определите индуктивность катушки.

5. Шар массой $M = 300$ г висит на нити длиной $l = 50$ см. В шар попадает горизонтально летящая пуля массой $m = 10$ г и застревает в нем. Определите, с какой минимальной скоростью должна лететь пуля, чтобы в результате попадания пули шар мог сделать на нити полный оборот в вертикальной плоскости.

Вариант 2

1. Резистор сопротивлением $R = 10$ Ом присоединяется к источнику, ЭДС которого $\mathcal{E} = 4,8$ В и внутреннее сопротивление $r = 2,0$ Ом. Определите ток, текущий по цепи.

2. Определите, какое количество теплоты выделится, когда пуля массой $m = 7,5$ г, летевшая со скоростью $v = 1200$ км/ч, застревает в мешке с песком.

3. При адиабатическом расширении двух молей одноатомного идеального газа его температура понизилась на $\Delta t = 10$ °С. Определите, какую работу он совершил. Универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль · К).

4. Некоторый пружинный маятник колеблется по закону $x = 2,0 \cos 16t$ (см), а максимальное значение кинетической энергии маятника $W = 20$ мДж. Определите параметры маятника (жесткость пружины и массу груза).

5. Горизонтальный металлический стержень длиной $l = 50$ см вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 2,0$ рад/с около

вертикальной оси, проходящей на расстоянии $l/3$ от края стержня. Определите ЭДС индукции между концами стержня, если вертикальная составляющая магнитного поля Земли $B_v = 50$ мкТл.

Вариант 3

(олимпиада-2008)

1. Два тела находятся на одной и той же высоте на расстоянии $L = 10$ м друг от друга. В некоторый момент времени одно тело отпускают, а второе бросают под углом $\alpha = 30^\circ$ к линии, соединяющей эти тела. Определите минимальное расстояние между телами. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Согласно закону Хаббла, отношение скорости любого далекого внегалактического объекта к расстоянию до него равно константе. Квазары А и В далеки от нашей Галактики. Определите отношение их кинетических энергий (в системе координат, связанной с нашей Галактикой), если массы квазаров равны, а расстояние до А в $n = 3,5$ раз больше расстояния до В. Скорость квазара А не превышает 10% от скорости света.

3. Два одинаковых сосуда, содержащих одинаковое число молекул азота, соединены краном. В первом сосуде среднеквадратичная скорость молекул $v_1 = 400$ м/с, а во втором $v_2 = 500$ м/с. Определите, какая установится среднеквадратичная скорость молекул, если открыть кран, соединяющий сосуды.

4. Идеальный одноатомный газ совершает цикл, состоящий из трех процессов. Сначала температура увеличивается в $n = 4,0$ раза, при этом она зависит от давления по закону $T = \alpha p^2$. Затем давление уменьшается при постоянном объеме, а далее происходит изобарное сжатие. Определите КПД цикла.

5. В электрическую цепь включены последовательно два проводника, сделанных из одного материала, но имеющих сечения S_1 и $S_2 = 4S_1$. Проводник сечением S_1 имеет температуру t_1 . Определите температуру проводника сечением S_2 , учитывая, что теплоотдача пропорциональна площади боковой поверхности проводника и разности температур проводника и окружающей среды. Температура воздуха t_0 .

6. Имеется «черный ящик» с клеммами 1, 2, 3 и 4. При подключении напряжения U к клеммам 1 и 2 вольтметр, подключенный к клеммам 3 и 4, показывает напряжение $U/2$. При подключении напряжения U к клеммам 3 и 4 вольтметр, подключенный к клеммам 1 и 2, показывает напряжение U . Нарисуйте

электрическую схему, если известно, что внутри «черного ящика» находятся только лишь резисторы.

7. Незаряженный металлический шарик массой m свободно падает в однородном электростатическом поле напряженностью E , создаваемом равномерно заряженной горизонтальной пластиной. Определите, на какую высоту поднимется шарик после абсолютно упругого удара о пластину, если при ударе на него переходит заряд q . Первоначально шарик находился на высоте H над пластиной. Заряд пластины много больше заряда, переданного шарiku.

8. К обкладкам плоского конденсатора, одна из которых заземлена, приложено напряжение U . В пространство между обкладками, параллельно им, вводится тонкая металлическая пластинка. Постройте график зависимости потенциала пластинки от ее расстояния до заземленной обкладки.

9. В некоторой области пространства создано поле, в котором однородные электрическое поле E и магнитное поле B взаимно перпендикулярны. Определите, какое расстояние пролетит электрон в такой области за время t , двигаясь прямолинейно.

10. Предмет и экран находятся на расстоянии $l = 1,0$ м друг от друга. Перемещая между ними собирающую линзу, получают два положения, находящихся на расстоянии $a = 60$ см, при которых линза дает четкое изображение предмета на экране. Найдите фокусное расстояние линзы.

*Публикацию подготовили
Ю. Колмаков, Ю. Сезонов*

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ
ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ (ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)**

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Мотоциклист, трогаясь с места, достигает скорости $v = 100$ км/ч за время $t = 5,4$ с. Считая движение равноускоренным, определите путь s , который понадобится для разгона до этой скорости.

2. На равномерно вращающемся горизонтальном диске на расстоянии $r = 20$ см от оси вращения лежит монета массой $m = 20$ г. Диск совершает $n = 30$ об/мин. Определите величину силы трения $F_{\text{тр}}$ между монетой и диском.

3. Шайба массой $m = 300$ г подлетает к борту хоккейной коробки под углом падения $\alpha = 60^\circ$ со скоростью $v = 72$ км/ч и после упругого удара отскакивает. Найдите модуль $|\Delta \vec{p}|$ изменения импульса шайбы при ударе о борт.

4. В закрытом сосуде в тепловом равновесии находится смесь водорода и кислорода. Во сколько раз среднеквадратичная скорость молекул водорода отличается от среднеквадратичной скорости молекул кислорода?

5. Для получения ледяных кубиков с температурой $t_0 = 0^\circ\text{C}$ в холодильник поставили форму для кубиков, содержащую воду при температуре $t_1 = 15^\circ\text{C}$ объемом $V = 1$ л. Какое количество теплоты Q отдала вода в процессе охлаждения и превращения в лед?

6. Какое количество N избыточных электронов имеет пылинка массой $m = 0,32$ мг, если она находится в равновесии в электрическом поле, создаваемом горизонтально расположенными пластинами плоского конденсатора? Напряжение между пластинами $U = 200$ В, а расстояние между ними $d = 2$ мм.

7. На сколько равных частей n нужно разрезать проволоку сопротивлением $R_1 = 64$ Ом, чтобы при их параллельном соединении получить сопротивление $R_2 = 4$ Ом?

8. Определите период колебаний T в цепи переменного тока,

если катушка индуктивностью $L = 20$ мГн имеет в этой цепи сопротивление $X_L = 6,3$ Ом.

9. На какой высоте H летит самолет, если с башни маяка высотой $h = 30$ м над поверхностью воды он виден под углом $\alpha = 0,06$ рад к горизонту, а его отражение в воде – под углом $\beta = 0,08$ рад относительно ее поверхности?

10. Радиоактивный изотоп стронция ^{90}Sr является одним из продуктов деления при атомном взрыве. Определите, через какое время t распадется $\delta = 7/8$ ядер стронция, если период полураспада $T = 28$ лет.

Физические постоянные

Молярная масса кислорода $M_{\text{к}} = M_{\text{O}_2} = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

Молярная масса водорода $M_{\text{в}} = M_{\text{H}_2} = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

Плотность воды $\rho_{\text{в}} = 10^3$ кг/м³

Удельная теплоемкость воды $c_{\text{в}} = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К)

Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,3 \cdot 10^5$ Дж/кг

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с²

Элементарный заряд $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл

Вариант 2

(олимпиада-2008)

1. С катера, движущегося относительно берега с постоянной скоростью $v_1 = 6$ м/с, в некотором направлении бросают камень со скоростью $v_2 = 10$ м/с относительно катера. На каком расстоянии l от катера камень упадет в воду, если в системе отсчета, связанной с берегом, камень движется прямолинейно? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

2. Небольшая шайба массой $m = 100$ г, закрепленная на легкой нерастяжимой нити длиной $l = 0,5$ м, скользит по гладкой наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом (рис.1). Определите силу T натяжения нити в момент времени, когда шайба проходит нижнюю точку своей траектории, если ее скорость в этой точке $v = 3$ м/с. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

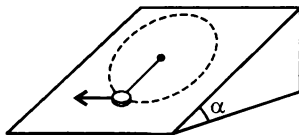


Рис. 1

3. Какую работу A нужно совершить, чтобы остановить брусок массой $m = 100$ г, поступательно движущийся со скоростью $v = 4$ м/с по гладкой горизонтальной поверхности?

4. График зависимости объема V кислорода от его температуры T при постоянном давлении $p_1 = 70$ кПа совпадает с графиком зависимости V от T для азота при давлении $p_2 = 160$ кПа. Во сколько раз отличаются массы этих газов? Газы считать идеальными. Молярные массы кислорода и азота равны $M_1 = 32$ г/моль и $M_2 = 28$ г/моль соответственно.

5. К газу в медленном процессе подведено $Q = 7$ кДж тепла. При этом $\delta = 60\%$ подведенного количества теплоты пошло на увеличение внутренней энергии газа. Найдите работу A , совершенную газом.

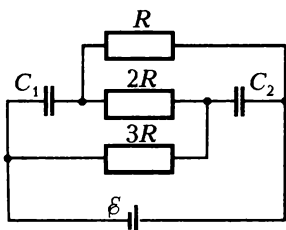


Рис. 2

7. В приведенной на рисунке 2 схеме сопротивление $R = 100$ Ом, ЭДС источника $\mathcal{E} = 120$ В, его внутреннее сопротивление пренебрежимо мало. а) Определите ток I через источник. б) Во сколько раз отличаются заряды конденсаторов, если их емкости одинаковы?

8. На горизонтальном столе в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией B лежат, пересекаясь, две металлические линейки (рис.3). По линейкам перемещают тонкий стержень с постоянной скоростью v , перпендикулярной стержню. Длина стержня L , сопротивление между концами стержня R , сопротивление линеек и контактных областей пренебрежимо мало. Найдите величину I тока в стержне.

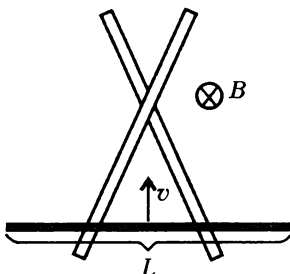


Рис. 3

9. Собирающая линза дает мнимое изображение предмета, помещенного перед ней на расстоянии $d = 40$ см. Расстояние от линзы до изображения $f = 120$ см. Постройте ход лучей и определите фокусное расстояние F линзы.

*Публикацию подготовили
А.Берестов, И.Горбатый, С.Ку克林, И.Федоренко*

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.Э.БАУМАНА**

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Двое рабочих одновременно приступили к изготовлению одинаковых партий деталей. Когда первый рабочий сделал половину деталей, второму оставалось изготовить 24 детали, а когда второй выполнил половину работы, первому оставалось сделать 15 деталей. Сколько деталей осталось изготовить второму рабочему, когда первый выполнил свою работу?

2. Решите уравнение $\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{2} \sin x = 0$.

3. Решите уравнение $\log_4 (10x + 46) = 1 + \log_2 (2 - x)$.

4. Решите неравенство $\log_x (4x - 3) > 2$.

5. Решите неравенство

$$(x - 2)\sqrt{6 - x - x^2} \geq (2 - 3x)\sqrt{6 - x - x^2}.$$

6. Найдите множество значений функции

$$f(x) = \sin\left(\sqrt{\pi^2 - x^2} - \frac{\pi}{3}\right).$$

7. Какой наибольший угол может быть между гипотенузой прямоугольного треугольника и медианой, проведенной из острого угла?

8. Какую наименьшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, на гипотенузе которого лежит точка $M(0; 1)$, а его катеты лежат на прямых $x = -2$ и $y = 0$?

9. Укажите все значения a , при которых система уравнений $(x - a)^2 = 8(y - x + a - 2)$, $\frac{1 - \log_2 y}{1 - \log_2 x} = 1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a .

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC , все стороны которого равны $2\sqrt{14}$, а высота пирамиды совпадает

с боковым ребром TA . Найдите объемы частей, на которые делит пирамиду плоскость, проходящая через середины стороны основания AC и бокового ребра TB и параллельная медиане TD боковой грани ATB , если расстояние от вершины пирамиды T до секущей плоскости равно 1.

Вариант 2

1. Два тела движутся равномерно по окружности в одну сторону. Первое тело проходит окружность на 3 с быстрее второго и догоняет второе тело каждые полторы минуты. За какое время каждое тело проходит окружность?

2. Решите уравнение $\sqrt{1 - \cos x} = \sqrt{2} \cos x$.

3. Решите уравнение $(\log_2 x) \log_{81} (8x) = \log_3 2$.

4. Решите неравенство $\frac{6}{3^x - 1} > 3^x$.

5. Решите неравенство $\sqrt{x^2 + 3x - 18} \leq \frac{6\sqrt{x^2 + 3x - 18}}{x + 2}$.

6. Найдите множество значений функции $f(x) = \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{5 \sin x - 3}{\sin x + 1}}$.

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, его диагонали AC и BD пересекаются в точке F , причем $AF : FC = 3 : 1$, $BF : FD = 4 : 3$, $\angle AFD = \arcsin(\sqrt{15}/4)$. Найдите радиус вписанной в треугольник CFD окружности, если $BD = 3,5$.

8. На плоскости xOy прямые $y = 3x - 2$ и $x = -1$ пересекаются в точке B , а прямая, проходящая через начало координат, пересекает заданные прямые в точках A и C соответственно. При каком положительном значении абсциссы точки A площадь треугольника ABC будет наименьшей? Найдите эту площадь.

9. Найдите все значения a , при которых система уравнений

$$(x - a)^2 = 9(y - x + a - 2), \quad \frac{1 - \log_2 y}{1 - \log_2 x} = 1$$

имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a .

10. Найдите площадь сечения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, параллельной диагонали BC_1 боковой грани BCC_1B_1 и проходящей через центр описанного около призмы шара и вершину основания A , если стороны основания призмы равны 3, а высота призмы равна $10/3$.

1. Напишите формулировку закона Ома для однородного участка цепи и его аналитическое выражение. Укажите единицы измерения входящих в него физических величин.

2. На рисунке 1 показан ход светового луча при переходе из среды I в среду II. В какой среде скорость света больше? Ответ обоснуйте.

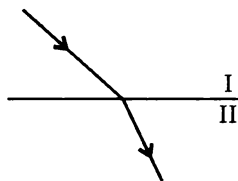
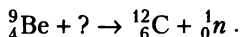


Рис. 1

3. Определите внутреннюю энергию U неона, находящегося в баллоне объемом $V = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3$ под давлением $p = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

4. Допишите ядерную реакцию



5. На гладкой горизонтальной плоскости лежит брусок массой m (рис.2). К бруску привязана нить длиной L , на конце которой находится шарик массой $3m$. В начальный момент нить была отклонена на некоторый угол и отпущена без начальной скорости. Найдите скорость бруска в момент, когда нить проходит через вертикальное положение, зная, что ее угловая скорость в этот момент равна ω .

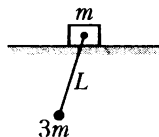


Рис. 2

6. На рисунке 3 показаны два точечных заряда $+2q$ и $-q$, соединенных изолирующим стержнем длиной L и находящихся в электрическом поле, созданном двумя бесконечными взаимно перпендикулярными равномерно заряженными плоскостями. Поверхностные плотности зарядов плоскостей одинаковы и равны $+\sigma$. Какую работу совершат силы поля при повороте стержня с зарядами вокруг середины стержня на 180° в плоскости рисунка?

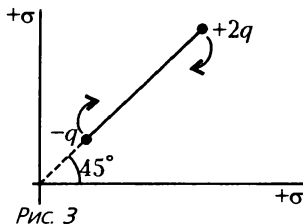


Рис. 3

7. Цилиндрический сосуд с жидкостью плотностью ρ вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси OO_1 (рис.4). Внутри сосуда к оси OO_1 в точке A прикреплен

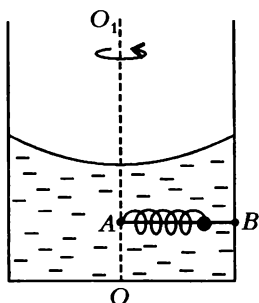


Рис. 4

тонкий горизонтальный стержень AB , по которому без трения может скользить муфта в виде шара радиусом r . Шар связан с концом стержня в точке A пружиной жесткостью k , длина которой в нерастянутом состоянии L_0 . Определите расстояние центра шара от оси вращения, если плотность материала шара в четыре раза меньше плотности жидкости.

Вариант 2

1. Что называют удельной теплотой плавления? В каких единицах она измеряется?

2. Тело брошено с поверхности земли вверх с начальной скоростью v_0 . Принимая потенциальную энергию тела на поверхности земли равной нулю, найдите, на какой высоте h кинетическая энергия тела будет равна потенциальной. Сопротивлением воздуха пренебречь.

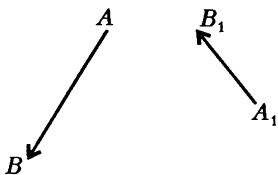


Рис. 5

3. На рисунке 5 показаны предмет AB и его изображение A_1B_1 , полученное с помощью линзы. Определите построением положения линзы и ее главной оптической оси.

4. При фотоэффекте максимальный импульс, передаваемый поверхности вольфрамовой пластинки при вылете каждого электрона, равен $p = 3,45 \cdot 10^{-25}$ кг·м/с. Найдите энергию ϵ квантов применяемого облучения. Работа выхода для вольфрама $A = 4,5$ эВ.

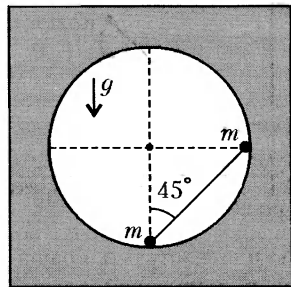


Рис. 6

5. В сферическую полость поместили гантель (два шарика массой m каждый, соединенных невесомым жестким стержнем) под углом $\alpha = 45^\circ$ к вертикали, как это показано на рисунке 6. Определите силу давления нижнего шарик на стенку полости сразу же после того, как гантель отпустили. Радиус шариков гантели много меньше радиуса сферы. Силами трения пренебречь.

6. На p - V -диаграмме (рис.7) изображен цикл, проводимый с одноатомным идеальным газом. Определите коэффициент полезного действия этого цикла.

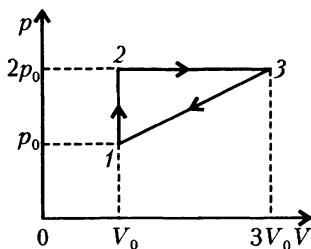


Рис. 7

7. На горизонтальной поверхности расположены три маленьких одинаково заряженных шарика, заряды которых q , $2q$, q , а массы $2m$, m , $2m$ соответственно. Шарiki соединены невесомыми, нерастяжимыми и непроводящими нитями длиной L каждая так, что нити образуют равносторонний треугольник (рис.8). Нить между шариками 1 и 3 пережигают. Пренебрегая гравитационным взаимодействием между шариками и силами трения, найдите максимальную скорость шарика 2.

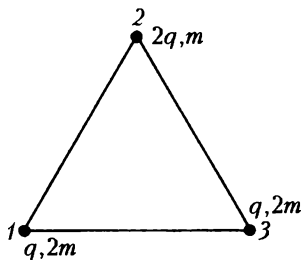


Рис. 8

Вариант 3

1. Тело движется прямолинейно вдоль оси X . На рисунке 9 представлен график зависимости проекции скорости тела v_x от времени t . Постройте график зависимости ускорения этого тела a_x от времени.

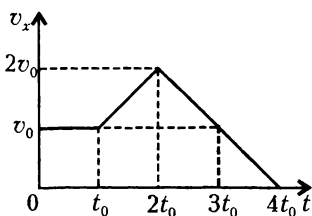


Рис. 9

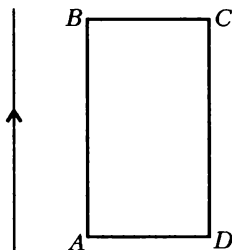


Рис. 10

2. Прямоугольный контур $ABCD$ перемещается поступательно в магнитном поле тока, текущего по прямолинейному длинному проводнику (рис.10). Укажите направление результирующей силы Ампера, действующей на контур, если он удаляется от проводника.

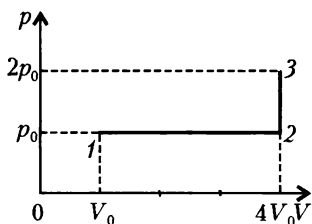


Рис. 11

5. Небольшая шайба массой m без начальной скорости соскальзывает с гладкой горки высотой $h = 0,7$ м и попадает на доску массой $M = 1,4$ т, лежащую у основания горки на гладкой горизонтальной плоскости (рис.12). Вследствие трения между шайбой и доской шайба тормозится и, начиная с некоторого момента, движется вместе с доской как единое целое. Найдите путь, пройденный шайбой по доске до остановки, если коэффициент трения между шайбой и доской $\mu = 0,5$.

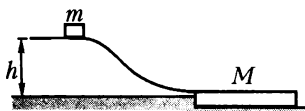


Рис. 12

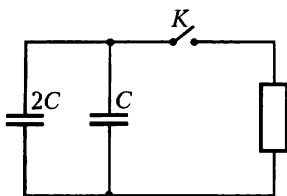


Рис. 13

6. В электрической схеме, показанной на рисунке 13, емкости плоских конденсаторов C и $2C$. Расстояние между обкладками первого конденсатора d , а максимальная сила притяжения между его обкладками F . Определите количество теплоты Q , выделившееся на сопротивлении после замыкания ключа K .

7. Вертикальная часть тонкой открытой с обоих концов L-образной трубки заполнена на длину L жидкостью и удерживается с помощью клапана K (рис.14). Найдите, через какое минимальное время t после открытия клапана вся жидкость вытечет из вертикальной части трубки. Силами трения и поверхностного натяжения пренебречь. При течении жидкость заполняет все сечение трубки.

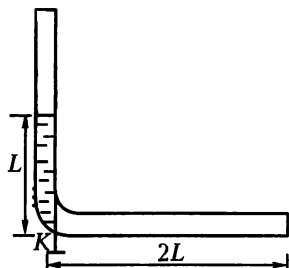


Рис. 14

3. Идеальный газ в состоянии 1 имеет температуру $T_1 = 100$ К (рис.11). Определите температуру этого газа в состоянии 3.

4. На каком расстоянии d от рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F = 20$ см надо поместить предмет, чтобы его мнимое изображение получилось в 4 раза меньше самого предмета?

6. В электрической схеме, показанной на рисунке 13, емкости плоских конденсаторов C и $2C$. Расстояние между обкладками первого конденсатора d , а максимальная сила притяжения между его обкладками F . Определите количество теплоты Q , выделившееся на сопротивлении после замыкания ключа K .

7. Вертикальная часть тонкой открытой с обоих концов L-образной трубки заполнена на длину L жидкостью и удерживается с помощью клапана K (рис.14). Найдите, через какое минимальное время t после открытия клапана вся жидкость вытечет из вертикальной части трубки. Силами трения и поверхностного натяжения пренебречь. При течении жидкость заполняет все сечение трубки.

1 (8 баллов). Объясните, почему теплоемкость двухатомных газов больше теплоемкости одноатомных газов.

2 (8 б.). Два пружинных маятника имеют одинаковые массы грузов. На рисунке 15 показана зависимость сил упругости пружин $F_{\text{упр}}$ этих маятников от растяжения ΔL . Период колебаний какого маятника больше? Объясните, почему.

3 (8 б.). Найдите отношение среднеквадратичных скоростей молекулярного водорода и гелия при одинаковых температурах.

4 (10 б.). На неподвижное тело массой m , находящееся на горизонтальной абсолютно гладкой плоскости, в момент времени $t = 0$ начинает действовать сила, направленная вдоль горизонтальной оси X . На рисунке 16 представлен график зависимости проекции F_x этой силы от времени t . Определите модуль импульса тела в момент времени $t = 4t_0$.

5 (10 б.). Два груза, массы которых $2m$ и m , связаны невесомой нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвиж-

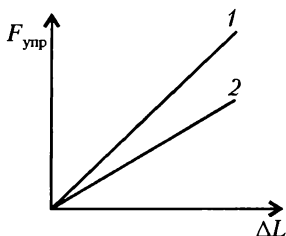


Рис. 15

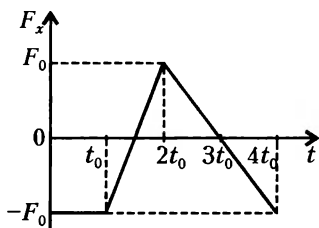


Рис. 16

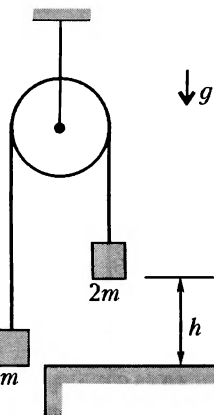


Рис. 17

ный блок (рис.17). В начальный момент груз массой $2m$ удерживают на высоте h над столом, затем его без толчка отпускают. Какое количество теплоты выделится при ударе этого груза о стол? Удар абсолютно неупругий. Массой блока и силами трения в блоке пренебречь.

6 (10 б.). Изменения состояния идеального газа при некотором круговом процессе $1-2-3-1$ показаны на графике зависимо-

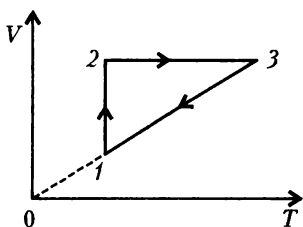


Рис. 18

сти объема газа от абсолютной температуры (рис.18). Изобразите этот цикл на графике зависимости давления газа от объема. Укажите, на каких участках графика газ получает тепло извне.

7 (10 б.). Найдите разность потенциалов на клеммах источника постоянного тока, если внешнее сопротивление замкнутой цепи в 5 раз

больше внутреннего сопротивления источника. ЭДС источника тока $\mathcal{E} = 6 \text{ В}$.

8 (10 б.). Южный полюс магнита приближается с некоторой скоростью к металлическому кольцу, двигаясь вдоль его оси перпендикулярно плоскости кольца. Определите направление индукционного тока в кольце. Ответ поясните.

9 (10 б.). Оптическая система состоит из рассеивающей L_1 и собирающей L_2 линз с общей главной оптической осью (рис.19). Главные фокусы рассеивающей линзы F_1 , а собирающей F_2 . Постройте дальнейший ход луча AB через оптическую систему.

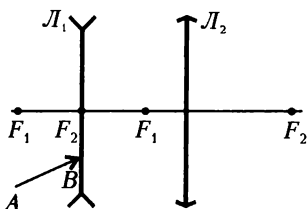


Рис. 19

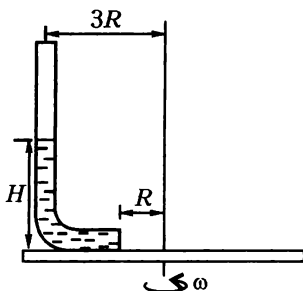


Рис. 20

10 (16 б.). Тонкая запаянная с одного конца трубка заполнена ртутью и закреплена на горизонтальной платформе, вращающейся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси так, что ртуть не выливается и заполняет полностью горизонтальное колено трубки (рис.20). Открытое колено трубки вертикально. Геометрические размеры установки указаны на рисунке, атмосферное давление p_0 , плотность ртути ρ . Найдите давление ртути у запаянного конца трубки. Силами поверхностного натяжения пренебречь.

Публикацию подготовили Л.Паршин, Ю.Струков

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА**

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(олимпиада «Ломоносов-2008»)

1. Найдите k , если $\frac{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}-2k}}+4}+4}{\sqrt{5}+2} = \sqrt{5}+2$.

2. Какое наибольшее число раз можно последовательно взять логарифм по основанию 3 от числа 27^{81} (первый раз логарифм берется от этого числа, а затем всякий раз – от числа, полученного в предыдущий раз)?

3. При каких значениях a существует единственное решение системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ (x-3)^2 + (y+4)^2 = a? \end{cases}$$

4. Лиса преследовала кролика по прямолинейной дорожке, ведущей к норе кролика. Их скорости были постоянны. В некоторый момент расстояние от кролика до норы было равно 7 м, а до лисы – 13 м. В некоторый следующий момент расстояние между кроликом и норой стало вдвое меньше расстояния между ним и лисой. Успела ли лиса догнать кролика, прежде чем тот юркнул в нору?

5. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием 6, если синус одного его угла равен косинусу другого.

6. Решите неравенство $\sqrt{25^x - 2^{3-x}} < 7 \cdot 2^{-\frac{x}{2}} - 2 \cdot 5^x$.

7. Решите уравнение $2 + \cos x = \sqrt{3} \left| \sin \frac{3x}{4} \right| \sin x$.

8. Основанием прямой призмы $ABCA'B'C'$ служит прямоугольный треугольник с катетами $AB = 3$ и $AC = 4$. Через середину бокового ребра $BB' = 10$ параллельно AC проведена прямая l . Какие значения может принимать площадь параллелограмма, у которого две вершины – точки A и B , а остальные две вершины лежат на прямых $A'C$ и l соответственно?

9. Найдите натуральные значения n , удовлетворяющие уравнению

$$2002 \left[n \sqrt{1001^2 + 1} \right] = n \left[2002 \sqrt{1001^2 + 1} \right],$$

где $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее числа x .

10. На числовой прямой отмечены 4 синие точки, соответствующие первым членам геометрической прогрессии с первым членом -2 и знаменателем -2 , а также 4 зеленые точки, соответствующие первым членам некоторой арифметической прогрессии с первым членом -5 . Какова при этом наименьшая возможная сумма длин 4 отрезков с разноцветными концами, включающими все 8 отмеченных точек? (Каждая из 8 точек является концом одного из отрезков.)

Вариант 2

(механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$\left| 1 - x^2 \right| - \left| x^2 - 3x + 2 \right| \geq 3|x - 1|.$$

2. Игорь решал тригонометрическое уравнение и получил ответ $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $\frac{4\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$. Ответ в конце учебника выглядел иначе: $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k$, $n, k \in \mathbb{Z}$. Правильный ли ответ получил Игорь? Приведите пример тригонометрического уравнения с ответом как в учебнике.

3. Решите систему

$$\begin{cases} \log_2 (2x^3 + 4x^2y - 3x^2) = \log_{11} (4xy^2 + 24y^3 - 12y^2), \\ \log_{11} (x^3 + 6x^2y - 3x^2) = \log_2 (8xy^2 + 16y^3 - 12y^2). \end{cases}$$

4. Окружность радиуса 6 проходит через вершину B треугольника ABC и пересекает его стороны AB и BC в точках E и F соответственно. Центр O окружности лежит на стороне AC , $AO = 12$, $CO = 10$, $\angle OBC = \angle BCO + \angle EOA$. В каком отноше-

нии прямая BO делит отрезок EF ? Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

5. Найдите все функции f , удовлетворяющие уравнению

$$f(x) + (x-2)f(1) + 3f(0) = x^3 + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

6. Через центр сферы проведены несколько плоскостей. Окружности, по которым эти плоскости пересекают сферу, пересекаются в 22 различных точках, причем в 12 из этих точек пересекаются по две окружности, а в остальных 10 точках – по три. Сколько плоскостей было проведено?

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите неравенство

$$\log_5 \frac{5-x}{2-x} \geq \log_{25} \sqrt{(x-5)^4} - 1.$$

2. Длина дороги, соединяющей пункты A и B , равна 540 км. В пункте A находится первый автомобиль, а в пункте B – второй автомобиль. В 8^{00} первый автомобиль отправляется в пункт B , а спустя некоторое время второй автомобиль отправляется в пункт A . В 13^{00} расстояние между автомобилями оказалось равным 150 км. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что, во-первых, скорости обоих автомобилей постоянны, причем скорость второго составляет $\frac{3}{2}$ от скорости первого, во-вторых, второй автомобиль прибыл в пункт A позже, чем первый в пункт B , и, в третьих, первый автомобиль прибыл в пункт B через 3 часа после встречи со вторым автомобилем.

3. Решите неравенство

$$\sqrt{1 - \sin 2x} + |\sin x| \leq \cos x.$$

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки E и D соответственно так, что $\angle BAD = 4\angle DAC$, $\angle BCE = 4\angle ECA$. Известно, что $AB \cdot CE = BC \cdot AD$, $AB = 2$, радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$. Найдите площадь треугольника ABC .

5. В шахматном турнире, проходившем по круговой системе (все участники играют между собой ровно один раз), участвовали $n \geq 17$ игроков. Если шахматная партия заканчивалась победой одного из игроков, то победитель получал 1 очко, а его соперник – 0 очков. Если партия между игроками заканчивалась вничью, то каждый игрок получал 0,5 очка. Известно, что по

итогах турнира число участников, набравших не более пяти очков, равно 11. Сколько участников набрали по 8,5 очка? Ответ должен быть обоснован.

6. В треугольной пирамиде $SABC$ точка O является центром описанной сферы. Точки K , L , M и N являются серединами ребер AB , CS , AC и BS соответственно. Отрезки KL и MN пересекаются в точке P . Известно, что сумма квадратов длин боковых ребер SA , SB и SC пирамиды $SABC$ равна сумме квадратов длин ребер AB , BC и AC , лежащих в основании этой пирамиды. Найдите радиус описанной около пирамиды $SABC$ сферы, если известно, что $SP = 3\sqrt{7}$, $OP = \sqrt{21}$.

Вариант 4

(физический факультет, март)

1. Решите уравнение

$$\cos(2^{2+x}) - 2\cos(2^{x+1}) + 1 = 0.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 - 5x + 6} \geq 6 - 5x + x^2.$$

3. Решите уравнение

$$6^x + 2^{x+1} - 3^{x+2} - 18 = 0.$$

4. В прямоугольнике $ABCD$ даны стороны $AB = 4$ и $BC = 12$. На стороне AD как на диаметре построена полуокружность, пересекающая сторону BC в точках M и N . Найдите площадь треугольника AMN .

5. Решите неравенство

$$x^2 \log_x 8 \log_9 x \log_2 3 < 8x + 6.$$

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2xy - 2 = \frac{x}{2y}, \\ \frac{2y}{x} + \frac{1}{2} = 2xy. \end{cases}$$

7. Найдите все значения a , при которых уравнение

$$|x^2 - 1| = |a + x|$$

имеет максимально возможное число различных решений.

8. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) на ребре $A_1 D_1$ взята точка E , $A_1 E : ED_1 = 2 : 1$, а на ребре $D_1 C_1$ взята

точка F , $D_1F : FC_1 = 2 : 1$, $AA_1 = 1$. Найдите расстояние между прямыми AE и DF .

Вариант 5

(физический факультет, июль)

1. Может ли при некоторых m , n , p и q быть верным равенство $\frac{m}{n} \log_q p = 1$, если m , n , p и q – целые положительные числа и $q \neq 1$? Приведите пример или обоснуйте отрицательный ответ.

2. Может ли при некоторых m , n , p и q быть верным равенство $q \log_n m = p$, если m , n , p и q – целые положительные числа, $n \neq 1$ и наибольший общий делитель m и n равен 1? Приведите пример или обоснуйте отрицательный ответ.

3. Обращая периодические дроби в обыкновенные, найдите, какой обыкновенной дроби равно выражение $3 \cdot 0,02(7) + 2 \cdot 0,91(6)$.

4. Укажите в градусах все углы β , удовлетворяющие условию $0^\circ < \beta < 720^\circ$, для каждого из которых его косинус равен $\cos 31^\circ$.

5. Окружность проходит через вершины Q и S треугольника QRS и пересекает сторону QR в точке K , а сторону RS – в точке L . Площадь четырехугольника $QKLS$ в 7 раз больше площади треугольника KRL . Найдите $KL : QS$.

6. Найдите множество решений неравенства $\frac{1}{2} \left(\frac{9x}{\pi} \right)^2 > \cos 3x$.

Ответ обоснуйте, используя свойства функций $y = \frac{1}{2} \left(\frac{9x}{\pi} \right)^2$ и $y = \cos 3x$.

7. Прямые, содержащие высоты AL и BM треугольника ABC , пересекаются в точке O . Верно ли утверждение, что $AO \cdot OL = BO \cdot OM$:

1) в случае остроугольного треугольника ABC ;

2) в случае, когда $\angle A$ – тупой?

Ответы обоснуйте.

8. На координатной плоскости xOy изобразите множество точек (x, y) , координаты которых удовлетворяют неравенству $4 \log_2(x^3) < 3 \log_3(y^4)$.

9. Для каждого значения a решите неравенство $x^3 - x^2(3^a + 3^{1-a}) + 3x \leq 0$.

10. Прямые, проходящие в пространстве через точки B, C, D и E , таковы, что прямая BC перпендикулярна прямой DE , а прямая BD перпендикулярна прямой CE . Докажите, что прямая BE перпендикулярна прямой CD .

Вариант 6

(факультеты химический, географический, биологический, психологии, биоинженерии и биоинформатики, фундаментальной медицины, факультет наук о материалах, физико-химический факультет)

1. Решите уравнение

$$\frac{\cos 2x}{1 - \sqrt{2} \sin x} = 0.$$

2. Найдите $\log_3 x$, если $x < 3$ и

$$\log_3 3x \log_3 9x \log_3 27x = \log_3^3 x + 23.$$

3. Решите неравенство

$$\arccos 3x \leq \arccos \sqrt{6 - 15x}.$$

4. Около треугольника ABC с высотами BB' и CC' описана окружность радиуса 6. Найдите радиусы окружностей, описанных около треугольников $BB'C$ и $AB'C'$, если $\cos \angle A = -\frac{1}{3}$.

5. Среди 30 ненулевых чисел, среднее арифметическое которых равно 4, есть числа обоих знаков. Какие из следующих утверждений про эти числа обязательно справедливы (а какие — не обязательно):

- а) среднее арифметическое положительных чисел больше 4;
- б) отрицательных чисел меньше, чем положительных;
- в) сумма модулей отрицательных чисел меньше, чем сумма положительных;
- г) модуль наибольшего отрицательного числа меньше, чем наибольшее положительное число?

6. Найдите радиус наибольшего шара, который можно разместить в проволочном каркасе прямоугольного параллелепипеда размером $4 \times 8 \times 9$.

7. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$x^4 + (a + 1)x^3 + (2a + 1)x^2 - (a + 1)x + 1 = 0$$

на промежутке $(-\infty; -1)$ имеет не менее двух корней.

1. Найдите целые корни уравнения

$$x^2 - (1 + \sqrt{3})x + 2(\sqrt{3} - 1) = 0.$$

2. Решите неравенство

$$|x + 1| \leq \sqrt{(x + 1)^2 (x^2 - 25)}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{x-3}(5-x) \leq \log_{x-3}|4x-14|.$$

4. Найдите корни уравнения

$$\frac{\sqrt{3} \sin 2x - 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \cos 2x}{\cos\left(x - \frac{7\pi}{3}\right)} = 0,$$

расположенные на промежутке $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

5. В треугольнике PQR длина биссектрисы PO равна 6, отношение длин отрезков QO и OR равно 3:4, периметр треугольника PQR равен 21. Чему равен косинус угла QPR ?

6. Среди 40 ненулевых чисел, среднее арифметическое которых равно 5, есть как положительные, так и отрицательные числа. Какие из перечисленных ниже утверждений относительно этих чисел верны, а какие нет (ответ следует обосновать):

- а) среднее арифметическое положительных чисел больше 5;
- б) модуль наименьшего отрицательного числа меньше, чем наибольшее положительное число;
- в) максимальное положительное число не меньше 5;
- г) количество положительных чисел больше количества отрицательных чисел?

7. При всех значениях параметра a решите уравнение

$$x^2 + 4x + 6 - 4a(x - a) - \cos(x + 2) = 8a + \cos(x - 4a + 2).$$

8. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) точка R лежит на диагонали AC , а точка Q – на диагонали DC_1 , при этом RQ – общий перпендикуляр к прямым AC и DC_1 . Чему равна величина угла RDQ ?

Вариант 8

(факультет почвоведения, факультет глобальных процессов)

1. Найдите область определения функции

$$y = \frac{2x + 7}{x + 2 + \sqrt{2x + 7}}.$$

2. Ученик шел от дома до школы со скоростью 3 км/ч и опоздал на урок на 1 мин. В другой раз он пошел со скоростью 4 км/ч и пришел за 3 мин до начала урока. С какой скоростью ему нужно идти в следующий раз, чтобы прийти в точности к началу урока?

3. Вычислите

$$\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} + 2\alpha\right), \text{ если } \cos \alpha = \frac{3}{5} \text{ и } -\frac{3\pi}{2} < \alpha < 0.$$

4. Решите неравенство

$$\log_{8x^2}(-4x^3) \geq 1.$$

5. Один из школьников: Алик, Боря, Витя или Гоша – разбил в классе стекло. На вопрос, кто это сделал, они дали противоречивые ответы.

Алик: стекло разбил Витя.

Боря: ни Витя, ни Алик этого не делали.

Витя: Боря стекла не разбивал.

Гоша: это сделал Боря.

Можно ли по этим ответам однозначно определить виновника, если солгать мог только он сам, а также не более чем один из остальных троих?

6. Стороны AD и BC четырехугольника $ABCD$ параллельны. Биссектрисы его углов A и D пересекаются в точке M , лежащей на стороне BC , а биссектрисы углов B и C – в точке N , лежащей на стороне AD . Найдите длины всех сторон четырехугольника $ABCD$, если $AM = 6$ и $BN = 4$.

7. Определите, какое наименьшее значение может принимать выражение

$$|x - 3y - 4| + |3y + 8 - x| + \sqrt{x^2 - xy - 2y^2},$$

и найдите суммарную длину линий, состоящих из всех точек (x, y) координатной плоскости, в которых это значение достигается.

Вариант 9

(экономический факультет)

1. Решите уравнение $\frac{6x^2 - 21x + 16}{1 + \sqrt{2x - 4}} = \sqrt{2x - 4} - 1$.

2. Решите уравнение $\frac{|\sin x|}{\operatorname{tg} x} = \cos 3x$.

3. Решите неравенство

$$x \log_2 (4^{x+1} - 2^{x+1} + 8) < x^2 + 4x.$$

4. На биссектрисе BL треугольника ABC как на диаметре построена окружность с центром в точке O , пересекающая сторону AB в точке D , а сторону BC – в точке E , причем $AD \cdot LC = EC \cdot AL$. Найдите площадь той части треугольника ABC , которая лежит вне данной окружности, если известно, что $\angle BAL = 2\angle BEO$, $DE = \sqrt{3}$.

5. Тринадцать пиратов делят клад золотых монет на палубе шхуны. При попытке разделить клад поровну оказалось, что остается 8 монет. Налетевшим штормом двух пиратов смыло за борт. Когда оставшиеся пираты снова стали поровну делить клад, то лишними оказались 3 золотые монеты. Затем в перестрелке погибли еще 3 пирата. Когда уцелевшие пираты опять стали делить клад, то на этот раз оказалось, что остается 5 монет. Из какого количества монет состоял клад, если для его переноски достаточно сундука, вмещающего 500 золотых монет?

6. Найдите все значения a , при которых уравнение

$$\begin{aligned} \frac{8}{\pi} \arctg\left(1 + \frac{x}{4}\right) \log_{\sqrt{17}+4} \left(x + 4 + \sqrt{x^2 + 8x + 17}\right) = \\ = a^2 - a \sin\left(\pi \frac{x^2 + 8x - 64}{32}\right) - 2 \end{aligned}$$

имеет единственное решение, и определите это решение.

7. По итогам года средняя (т.е. в расчете на одно предприятие) прибыль по отрасли составила 2 млн у.е., хотя часть предприятий работала в убыток. Для каждого из перечисленных ниже утверждений выясните, всегда ли оно верно (ответ обоснуйте):

а) количество прибыльных предприятий превосходит количество убыточных;

б) суммарная прибыль всех прибыльных предприятий больше 4 млн у.е.;

в) наибольшая величина прибыли среди всех предприятий больше 2 млн у.е.;

г) средняя прибыль по всем прибыльным предприятиям больше среднего убытка по всем убыточным предприятиям.

Вариант 10

(Институт стран Азии и Африки)

1. Решите уравнение

$$\frac{3x^2 - 5x}{3x - 2} - 1 = \frac{2}{2 - 3x}.$$

2. Решите неравенство $\frac{128}{739} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{x}} \geq \frac{4^x}{\sqrt[4]{81^{2x-1}}}.$

3. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 12 + x - 10y, \\ x^2 + 3xy + 2y^2 = 16 + 6x + 4y. \end{cases}$$

4. На собрании акционеров было принято решение увеличить прибыль предприятия за счет расширения ассортимента выпускаемой продукции. Экономический анализ показал, что дополнительные доходы, приходящиеся на каждый вид новой продукции, оказываются равными 75 млн руб.; дополнительные расходы при освоении первого вида новой продукции составляют 13 млн руб., а освоение каждого последующего вида требует на 7 млн руб. расходов больше, чем освоение предыдущего вида. Очередной вид продукции принимается к производству при условии, что он принесет прибыль. Верно ли, что в результате решения акционеров:

а) предприятие может освоить более 11 видов новой продукции;

б) предприятие может освоить менее 9 видов новой продукции;

в) возможный наибольший прирост прибыли составит менее 310 млн руб.;

г) возможный наименьший прирост прибыли составит более 65 млн руб.?

Ответ следует обосновать.

5. Найдите корни уравнения

$$\cos\left(\frac{4\pi}{x}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{x}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{x}\right),$$

удовлетворяющие неравенству $\log_{x+2}(x^2 - 2x + 4) \leq 1.$

6. Выпуклый пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что длины сторон AB, BC, CD, DE равны $\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{57}}{2}, \frac{\sqrt{19}}{2}, \sqrt{3}$ соответственно. Диагональ CA параллельна стороне DE , величина угла между диагоналями CA и CE равна $\frac{\pi}{6}$. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$.

7. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2 - 4x - 5} + 4}{x^2 - 4x - 21} < \frac{2x + 2 + 5}{4x^2 + 16x - 9}.$$

8. В правильную треугольную пирамиду, длина стороны основания которой равна 6, вписана сфера. Другая сфера с радиусом, равным 4, описана около этой пирамиды. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной сфер.

Вариант 11

(социологический факультет)

1. Решите неравенство

$$|x| \leq \frac{18 - 3x}{|x|}.$$

2. Вычислите $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} \alpha$ при $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

3. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 80° . Найдите угол между высотой и медианой, проведенными к гипотенузе.

4. Решите уравнение

$$(x^2)^{\log_3 x} = \frac{x^5}{9}.$$

5. Среди учеников начальной школы провели опрос: кто любит зиму, а кто – лето. Оказалось, что 90% любителей зимы любят и лето, а 72% любителей лета любят и зиму. Зато 10% всех опрошенных не любят ни зимы, ни лета. Сколько процентов опрошенных любят только один из этих сезонов, но не любят другой? Каким при этом могло быть наименьшее число опрошенных?

6. Изобразите на координатной плоскости множество решений уравнения

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{y+3} = \sqrt{x+y} + 2.$$

7. Найдите наименьшее и наибольшее значения параметра a ,

при которых уравнение

$$\arcsin ax = 3 \arccos x + \frac{\pi}{6}$$

имеет хотя бы одно решение.

Вариант 12

(факультет государственного управления)

1. Решите уравнение $|1 - x| + |x + 1| = \frac{2x}{|x|}$.

2. Предприятие выплатило заработную плату своим сотрудникам, перечислило 26% от заработной платы в социальные фонды и закупило необходимое оборудование, кроме этого, предприятие еще выплатило 15% от всех указанных затрат в виде налога государству. Для всех выплат предприятию потребовалось 202400 рублей. Если бы заработная плата увеличилась на 10%, а затраты на оборудование возросли на 30%, то суммарные затраты в этом случае составили бы уже 234140 рублей. Сколько средств предприятие потратило на заработную плату, а сколько – на закупку оборудования?

3. В треугольнике ABC точка O – центр вписанной окружности. Величина угла ACB равна 120° . Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $AO = \sqrt{6}$, $BO = 3$.

4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCA'B'C'D'$ ($ABCD$ и $A'B'C'D'$ – основания, $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$) известны длины отрезков: $AD' = \sqrt{34}$, $AC = \sqrt{58}$, $AB' = \sqrt{74}$. Найдите объем параллелепипеда $ABCA'B'C'D'$.

5. Решите неравенство

$$x - \sqrt{6x - x^2 - 8} \leq 2 - \sqrt{x^2 - 2x - 3}.$$

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 7 + 9^x = 2^y + 4 \cdot 3^x, \\ 11 - 3 \cdot 2^{y+1} = 3^x - 4^y. \end{cases}$$

7. Найдите значения параметра a из интервала $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x + \sqrt{3}y| + |y - \sqrt{3}x| = 2 \sin a, \\ (\sqrt{3}x + y)^2 + (\sqrt{3}y - x)^2 = 4 \cos a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

(Высшая школа государственного аудита)

1. Населенные пункты A и B расположены на берегу реки, текущей со скоростью 4 км/ч. Моторная лодка, скорость которой в стоячей воде равна 8 км/ч, проплыв из пункта A в пункт B , мгновенно разворачивается и вновь возвращается в пункт A . С какой постоянной скоростью должна плыть лодка по озеру, чтобы за то же время она смогла проплыть такое же расстояние?

2. Решите уравнение $\cos x - \sin x = 1$.

3. Подводя еженедельно баланс финансовый деятельности, в турфирме отмечают неделю либо как прибыльную – при положительном балансе, либо как убыточную – при отрицательном. Общий доход за 52 недели – 26 миллионов рублей прибыли. Какие из следующих утверждений при этом справедливы, а какие – нет (ответ обоснуйте):

а) убыточных недель меньше, чем прибыльных;

б) абсолютная величина суммарного баланса по убыточным неделям меньше, чем суммарный баланс по прибыльным неделям;

в) абсолютная величина баланса в самую убыточную неделю меньше, чем величина баланса в самую прибыльную неделю;

г) средняя величина недельного баланса по прибыльным неделям составляет не менее полумиллиона рублей;

е) наибольшая величина недельной прибыли больше полумиллиона рублей?

4. Решите уравнение $\sqrt{\frac{7}{4} - |x + 1|} = 1 - |x|$.

5. Квадрат со стороной длины 5 и треугольник, длина наименьшей стороны которого равна 10, имеют общую вершину

A . Величина угла треугольника при вершине A равна $\frac{\pi}{4}$. Каково взаимное расположение этих фигур, при котором площадь их общей части максимальна? Найдите эту площадь.

6. Решите уравнение $9^{(\log_3 x)^2 - \frac{1}{2}} = x^{\log_3 x} + 18$.

7. Из 102 школьников выпускных классов пятерку по истории имеют 28 человек, по географии – 30, по математике – 25 человек. Среди тех, у кого пятерка по истории, восемь школьников имеют пятерку по географии и семеро – по математике, а среди имеющих пятерку по географии у шестерых пятерка и по математике. Трое имеют пятерки по истории, географии и математике. Сколько школьников не имеют пятерок ни по одному из этих предметов?

8. Найдите значения a , при которых на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ существует ровно шесть корней уравнения

$$\cos 6x + a = (2a + 1) \cos 3x.$$

9. Покупатель просит отвесить ему 2 кг конфет одного сорта. В распоряжении продавщицы есть гиря массой 1 кг и неисправные рычажные (чашечные) весы – разрегулирование произошло из-за смещения чашек относительно центра весов. Продавщица решила поступить так. Сначала она положила гирю на левую чашку весов и уравнивала ее конфетами, которые после взвешивания отдала покупателю. Затем положила гирю на правую чашку, вновь уравнивала ее конфетами и после взвешивания также отдала их покупателю, который расплатился за 2 кг. Выгодно ли такое решение покупателю?

ФИЗИКА

Физический факультет

Задачи устного экзамена

1. К концам однородной балки длиной L и массой M прикреплены невесомые блоки. Через блоки перекинута гладкая невесомая и нерастяжимая нить, на которых закреплены

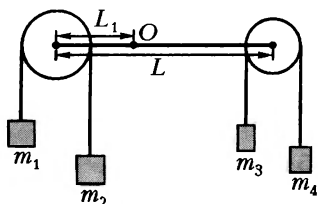


Рис. 1

грузы $m_1 - m_4$, как показано на рисунке 1. На каком расстоянии L_1 от левого конца балки расположена точка опоры O , если балка находится в равновесии при установившемся движении грузов?

2. Маленькая шайба, скользя по гладкой горизонтальной плоскости вдоль оси X , попадает на шероховатый участок этой плоскости. Коэффициент сухого трения μ на этом участке изменяется так, как показано на рисунке 2, его максимальное значение равно μ_0 . Найдите модуль v_0 начальной скорости шайбы, если она остановилась в точке $x_0 = 2L$.

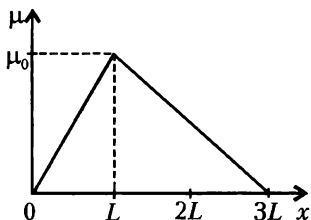


Рис. 2

3. Горящая цилиндрическая парафиновая свеча плавает в воде, налитой в цилиндрический стакан. Она горит так, что парафин сгорает, не стекая вниз. Длина свечи уменьшается с постоянной скоростью

тью, модуль которой равен u . Свечу слегка поддерживают так, чтобы ее ось оставалась вертикальной. Найдите модуль v скорости, с которой уровень воды движется относительно стакана во время горения свечи. Площадь поперечного сечения свечи s , а стакана S . Плотность воды ρ_v , а парафина $\rho_{\text{п}}$.

4. На неизвестной планете к неподвижному штативу на тонкой легкой нерастяжимой нити длиной L подвешен небольшой свинцовый груз. Если этот груз заставить совершать колебания в вертикальной плоскости, при которых максимальное отклонение нити от вертикали будет равно некоторому углу α_0 , то отношение максимального значения натяжения нити к минимальному будет равно n . Если же этот груз заставить двигаться по окружности радиусом $L \sin \alpha_0$, то период его обращения будет равен T . Пренебрегая сопротивлением движению груза, найдите модуль g ускорения свободного падения на этой планете в месте проведения опыта.

5. В левое колено U-образной трубки, частично заполненной водой, опускают цилиндр радиусом $r = 1$ см и высотой $h = 1,5$ см, изготовленный из пробки. Колена трубки вертикальны, а ее края находятся на одном горизонтальном уровне. Диаметр сечения трубки $d = 3$ см. Цилиндр плавает так, что его основания горизонтальны, а расстояние от его верхнего основания до края трубки $a = 2$ мм. Затем оба конца трубки закрывают горизонтальными крышками, которые закрепляют на трубке. На сколько нужно медленно увеличить давление воздуха в правом колене, чтобы цилиндр коснулся крышки? Плотность пробки $\rho = 0,2$ г/см³, плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см³, атмосферное давление $p_0 = 0,1$ МПа, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Давлением насыщенных паров воды пренебречь. Температуру в трубке считать неизменной.

6. На рисунке 3 показана зависимость давления p от внутренней энергии W одного моля идеального одноатомного газа, используемого в качестве рабочего вещества теплового двигателя. Найдите КПД цикла этого двигателя.

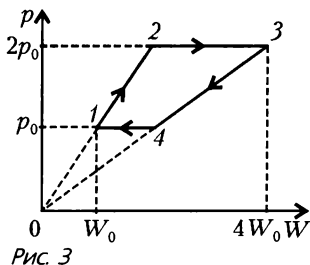


Рис. 3

7. Горизонтально расположенная пластина плоского конденсатора подвешена на легкой металлической пружине жесткостью k , другой конец которой закреплен. Вторая пластина конденсатора закреплена на изоляторе так, что она находится под первой пластиной. Площадь каждой

пластины S . В результате кратковременного касания изолированной пластины полюсом источника, другой полюс которого подсоединен к пружине, между пластинами возникла разность потенциалов U . Каким должно быть первоначальное расстояние

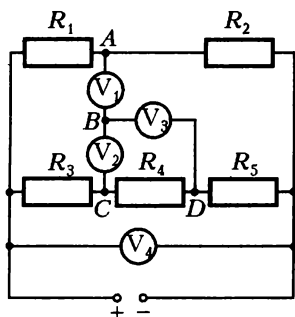


Рис. 4

L между пластинами, чтобы они в последующие моменты времени не касались друг друга?

8. В схеме, показанной на рисунке 4, использованы четыре одинаковых вольтметра с внутренним сопротивлением 1 Мом каждой. Показания четвертого вольтметра $U_4 = 6 \text{ В}$. Определите показания остальных вольтметров, если сопротивления резисторов таковы: $R_1 = R_3 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 50 \text{ Ом}$, $R_4 = 30 \text{ Ом}$, $R_5 = 20 \text{ Ом}$.

9. Два гвоздя вбиты в вертикальную стену на расстоянии L друг от друга на одном горизонтальном уровне. Тонкая гибкая проволока прикреплена одним концом к первому гвоздю и переброшена через второй гвоздь. К свободному концу проволоки прикреплен груз массой m . Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией B , направленной горизонтально и перпендикулярно проволоке. Найдите силу электрического тока, который должен протекать по участку проволоки, расположенному между гвоздями, чтобы этот участок имел в равновесии форму полуокружности. Массой проволоки и ее трением о второй гвоздь пренебречь.

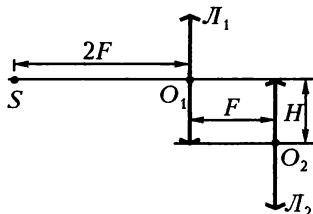


Рис. 5

10. Две одинаковые тонкие собирающие линзы L_1 и L_2 расположены так, как показано на рисунке 5. Расстояние между главными плоскостями линз равно их фокусному расстоянию F , а расстояние между их главными оптическими осями равно H . На главной оптической

оси первой линзы на расстоянии $2F$ от нее находится точечный источник S . Найдите расстояние между источником и его изображением, создаваемым этой системой линз.

11. Из стеклянных пластинок трех видов: не пропускающих свет (зачерненных) и прозрачных, имеющих показатели преломления n_1 и n_2 , изготовлена дифракционная решетка. Эти пластинки имеют одинаковые размеры и чередуются так, как

показано на рисунке 6. На решетку нормально падает монохроматический параллельный пучок света с длиной волны λ . За решеткой параллельно ей расположена собирающая тонкая линза. В фокальной плоскости линзы находится экран, перпендикулярный главной оптической оси линзы. На экране наблюдается дифракционная картина. При какой толщине h пластинок не будет наблюдаться свет в главном фокусе линзы?

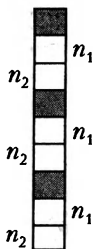


Рис. 6

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Задачи устного экзамена

1. Колесо радиусом R катится без проскальзывания по горизонтальной дороге с ускорением a (рис.7). Какие ускорения относительно неподвижной системы отсчета имеют точки A и B , расположенные на горизонтальном диаметре колеса, в тот момент, когда скорость центра колеса равна v ?

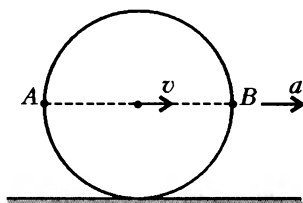


Рис. 7

2. Два шарика одного и того же диаметра, имеющие массы m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$), связаны между собой легкой нерастяжимой нитью, длина которой значительно превышает диаметр шариков. Шарик сбросили с достаточно большой высоты. Спустя некоторое время после этого вследствие сопротивления воздуха скорость падения шариков стала постоянной. Найдите натяжение нити T при установившемся падении шариков. Ускорение свободного падения g .

3. Клин с углом α при вершине находится на горизонтальном столе (рис.8). На поверхности клина располагается брусок массой m , к которому привязана невесомая нерастяжимая нить. Второй конец нити перекинут через блок на клине и прикреплен к неподвижной опоре. При этом отрезок нити от опоры до блока горизонтален, а отрезок нити от блока до бруска параллелен поверхности клина. Найдите модуль T силы натяжения нити, если клин двигают по столу вправо с ускорением a_0 . Движение всех тел происходит в плоскости рисунка. Трением пренебречь.

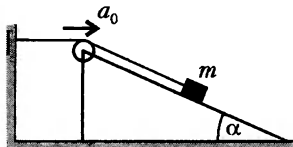


Рис. 8

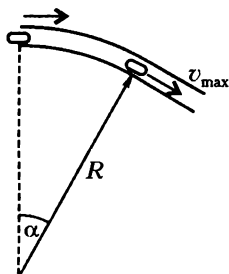


Рис. 9

4. Горизонтальный участок шоссе представляет собой дугу окружности радиусом $R = 100$ м с центральным углом $\alpha = 30^\circ$, переходящую в прямолинейный отрезок (рис.9). Автомобиль со всеми ведущими колесами, стоявший в начале криволинейного участка, начинает разгоняться с постоянным тангенциальным ускорением. С какой максимальной по модулю скоростью v_{\max} может выехать автомобиль на прямолинейный участок, если коэффициент трения между шинами автомобиля и полотном шоссе $\mu = 0,3$?

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

5. Два маленьких шарика массами m и $2m$ движутся в одной плоскости так, что их импульсы направлены взаимно перпендикулярно, а модули импульсов равны p и $p/2$ соответственно. Шарики сталкиваются, причем после соударения модуль импульса шарика массой m становится равным $p/2$, а модуль импульса шарика массой $2m$ становится равным p . Какое количество теплоты Q выделилось при соударении шариков? Действием всех внешних сил пренебречь.

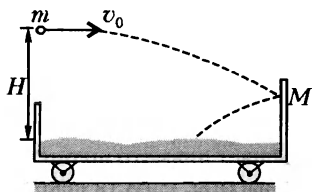


Рис. 10

6. На горизонтальных рельсах стоит тележка массой M (рис.10). В нее бросают шар массой m , который ударяется о правую стенку тележки и падает на ее дно, застревая в насыпанном на дно песке. В момент, когда шар пролетал над левой стенкой тележки, его скорость была равна $v_0 = 4$ м/с и направлена горизонтально, а высота над поверхностью песка составляла $H = 1,8$ м. Какой путь s пройдет тележка к моменту падения шара на песок, если длина тележки $L = 2$ м? Удар шара о стенку считать абсолютно упругим, стенку и шар гладкими, трением при движении тележки и размером шара пренебречь. При расчете положить $m = M/9$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

7. На горизонтальном столе лежит полая треугольная призма массой m , изготовленная из листового металла (рис.11). Основания призмы представляют собой правильные треугольники со стороной a , две

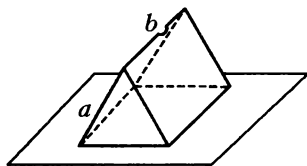


Рис. 11

боковые грани призмы – прямоугольники со сторонами a и b , нижняя грань отсутствует. Нижние ребра оснований и боковых граней призмы плотно (без зазора) прилегают к столу. Через отверстие в верхнем ребре в призму медленно наливают воду. До какой высоты h нужно заполнить водой призму, чтобы она оторвалась от стола? Плотность воды ρ .

8. Маленькая шайба находится на горизонтальной поверхности стола, состоящей из двух панелей: гладкой и шероховатой (рис.12). Координатная ось OX направлена перпендикулярно стыку панелей. Шайба скользит по гладкой панели параллельно оси OX и в некоторый момент времени попадает на шероховатую панель. Коэф-

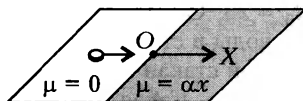


Рис. 12

фициент трения между шайбой и шероховатой панелью возрастает по мере удаления от стыка панелей по линейному закону $\mu(x) = \alpha x$, где $\alpha = \text{const}$. Через какое время τ после попадания шайбы на шероховатую панель ее скорость уменьшится в 2 раза? Ускорение свободного падения g .

9. Искусственный спутник Земли, имеющий форму шара радиусом $R = 0,5$ м, движется по круговой орбите со скоростью $v = 7,9$ км/с. Давление воздуха на высоте орбиты спутника $p = 0,9$ Па, температура $T = 270$ К. Полагая, что скорость теплового движения молекул воздуха пренебрежимо мала по сравнению со скоростью спутника, найдите среднее число \bar{z} столкновений молекул со спутником в единицу времени. Постоянная Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

10. В тепловом двигателе, рабочим телом которого является один моль идеального одноатомного газа, совершается циклический процесс, изображенный на рисунке 13, где 1–2 – изохорный процесс. Работа газа за один цикл составляет $A = 40$ Дж, температуры газа в состояниях 1 и 3 равны $T_1 = 300$ К и $T_3 = 330$ К соответственно. Найдите коэффициент полезного действия цикла η . Универсальная газовая постоянная $R = 8,3$ Дж/(моль · К).

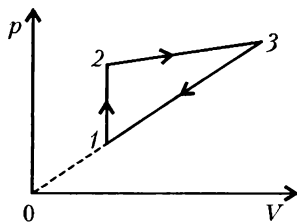


Рис. 13

11. В цилиндрическом сосуде при температуре 0°C находятся вода и кусок льда, примерзший ко дну сосуда, причем уровень воды располагается на высоте $h_0 = 20$ см от дна сосуда, а лед не выступает над поверхностью воды. Когда содержимому сосуда

сообщили количество теплоты $Q = 60$ кДж, доля $\eta = 10\%$ льда расплавилось, а оставшаяся часть льда всплыла на поверхность. На какой высоте h от дна сосуда оказался уровень воды в сосуде после этого? Площадь поперечного сечения сосуда $S = 200$ см², плотность воды $\rho_v = 1$ г/см³, плотность льда $\rho_l = 0,9$ г/см³, удельная теплота плавления льда $\lambda = 332$ Дж/г.

12. Металлический шарик, нагретый до температуры $t = 60$ °С, положили в стакан с водой, имеющей температуру $t_0 = 20$ °С. После достижения теплового равновесия температура воды в стакане стала $t_1 = 30$ °С. Затем шарик переложили в другой стакан с таким же количеством воды, имеющей температуру t_0 . Какая температура t_2 установится в этом стакане? Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

13. Плоский конденсатор, подключенный к источнику с ЭДС \mathcal{E} , состоит из двух квадратных обкладок площадью S каждая, расположенных на расстоянии d друг от друга. Между обкладками находится диэлектрическая пластинка с диэлектрической проницаемостью ϵ , заполняющая весь объем конденсатора. Пластинку начинают медленно выдвигать вдоль одной из сторон конденсатора с постоянной скоростью v_0 . Какой по величине и направлению ток I будет течь в цепи источника при этом?

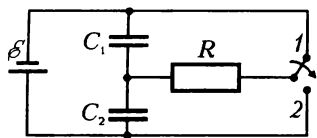


Рис. 14

Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

14. Цепь, изображенная на рисунке 14, состоит из двух конденсаторов емкостями C_1 и C_2 , источника с ЭДС \mathcal{E} и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, резистора и ключа.

В течение достаточно длительного времени после сборки схемы ключ находился в положении 1. Какое количество теплоты Q выделится в резисторе после перебрасывания ключа в положение 2? Сопротивлением подводящих проводов и ключа пренебречь.

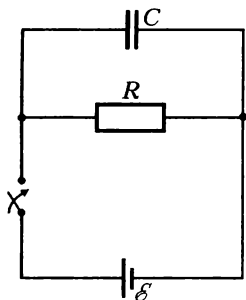


Рис. 15

15. Электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке 15, состоит из конденсатора, резистора, источника тока и ключа. Первоначально ключ был разомкнут. Найдите ЭДС источника, если известно, что сила тока через источник сразу после замыкания ключа в $n = 2$ раза больше установившейся силы тока в цепи, а установившееся напряжение на конденсаторе $U = 1,75$ В.

16. Свободная заряженная частица движется в однородном магнитном поле с индукцией B по окружности радиусом R . В некоторый момент времени включают однородное электрическое поле, напряженность E которого направлена параллельно магнитной индукции. Через какое время Δt после включения электрического поля кинетическая энергия частицы увеличится в $n = 2$ раза? Силу тяжести не учитывать.

17. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L и плоского воздушного конденсатора емкостью C . Найдите среднюю за период колебаний силу притяжения обкладок конденсатора друг к другу, если амплитуда тока в катушке I_0 . Площадь обкладки конденсатора S , электрическая постоянная ϵ_0 .

18. Оптическая система состоит из тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 10$ см и плоского зеркала, расположенного позади линзы на расстоянии $b = 25$ см от нее перпендикулярно ее главной оптической оси (рис.16). Светящийся предмет находится на расстоянии $d = 15$ см перед линзой. Определите расстояние l между двумя действительными изображениями предмета, даваемыми этой системой.

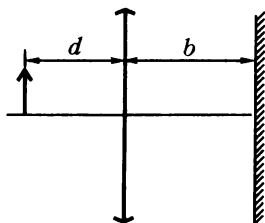


Рис. 16

19. Оптическая система состоит из двух тонких собирающих линз L_1 и L_2 с фокусными расстояниями $F_1 = 10$ см и $F_2 = 20$ см соответственно, расположенных так, что их главные оптические оси совпадают, а расстояние между линзами равно сумме их фокусных расстояний (рис.17). Система формирует изображение предмета высотой $l = 1$ см, находящегося слева от линзы L_1 на расстоянии $d = 40$ см от нее. Найдите величину $\theta = l'/d'$, где l' – высота изображения, d' – расстояние от изображения до линзы L_2 .

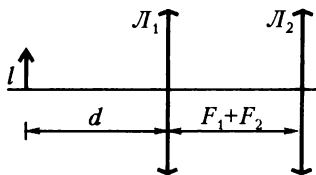


Рис. 17

20. На выпуклую поверхность тонкой плосковыпуклой линзы падает узкий пучок световых лучей, параллельный ее главной оптической оси (рис.18). Если на небольшом расстоянии от плоской поверхности линзы поместить параллельно ей плоскопараллельную стеклянную плас-

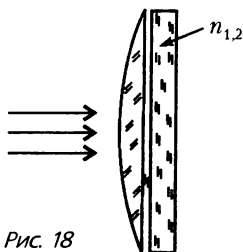


Рис. 18

тинку с показателем преломления $n_1 = 1,4$, то точка, в которой фокусируется пучок, сместится вдоль главной оптической оси линзы на $l_1 = 2,8$ мм. На какое расстояние l_2 сместится от фокуса линзы эта точка, если показатель преломления пластинки сделать равным $n_2 = 1,7$? Углы падения и преломления света считать малыми.

Химический факультет

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Напишите уравнение Эйнштейна для фотоэффекта.

2. Что такое внутренняя энергия термодинамической системы?

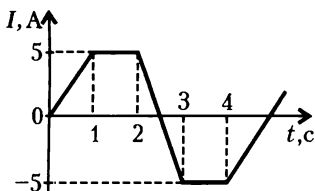


Рис. 19

3. На рисунке 19 приведена зависимость от времени t силы тока I , протекающего по соленоиду (длинной проволочной катушке) с индуктивностью $L = 2$ мГн. Найдите максимальное значение ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_{si} , возникающей при этом в катушке.

4. Гравитационная постоянная, определенная экспериментально в опытах Кавендиша, оказалась примерно равной $G \approx 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$. Считая, что в месте проведения эксперимента радиус Земли $R = 6400$ км, а ускорение свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, оцените Массу Земли M , не прибегая к другим табличным данным.

5. К источнику тока с внутренним сопротивлением $r = 5$ Ом подключен резистор сопротивлением $R_1 = 25$ Ом. Каково сопротивление резистора R_2 , который надо включить в цепь последовательно, чтобы мощность, выделяемая в резисторе R_1 , уменьшилась в $n = 4$ раза?

6. Предмет располагается на двойном фокусном расстоянии от рассеивающей линзы с фокусным расстоянием F . Линзу заменяют на собирающую с таким же положением фокусов. Определите отношение k линейных увеличений даваемых линзой изображений предмета в первом и втором случаях.

7. Шарик для пинг-понга массой $m = 10$ г удерживают под водой на глубине $H = 1$ м. После того как шарик отпустили, он всплывает и выскакивает из воды в воздух на высоту $h = 0,2$ м. Какую работу $A_{тр}$ совершили при этом силы трения? Радиус

шарика $R = 2$ см, плотность воды $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м³, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

8. Некоторое количество идеального одноатомного газа участвует в циклическом процессе. При этом его внутренняя энергия U меняется так, как показано на рисунке 20. Определите работу газа за один цикл процесса.

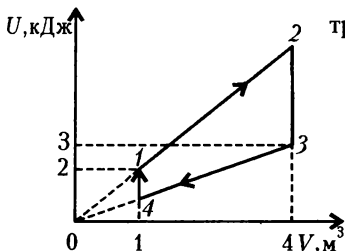


Рис. 20

9. При прыжках на лыжах с трамплина скорость лыжника в мо-

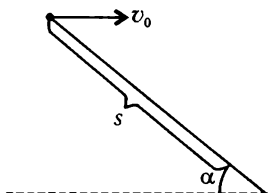


Рис. 21

мент отрыва равна v_0 и направлена горизонтально, а угол наклона при приземлении равен α (рис.21). Какова оказалась бы дальность полета лыжника s , если бы не было сопротивления воздуха?

10. Пластины плоского воздушного конденсатора расположены горизонтально. Верхняя пластина подвешена на проводящей пружине, а нижняя закреплена неподвижно. Конденсатор включен в схему, показанную на рисунке 22. При этом расстояние между пластинами конденсатора оказалось равным $d = 0,3$ мм. Каков вес P верхней пластины в данных условиях? Масса каждой пластины $m = 5$ г, площадь $S = 100$ см². ЭДС источника $\mathcal{E} = 100$ В. Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 9 \cdot 10^{-12}$ Кл²/(Н · м²), а ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

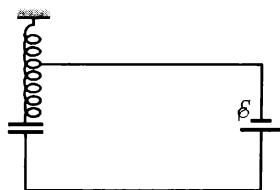


Рис. 22

Вариант 2

1. Сформулируйте закон всемирного тяготения.
2. Что такое относительная влажность воздуха?
3. Выведите формулу для расчета эквивалентного сопротивления параллельно соединенных резисторов с сопротивлениями R_1 и R_2 .

4. В схеме, изображенной на рисунке 23, резисторы R_1 и R_2 имеют одинаковые сопротивления R . ЭДС источника $\mathcal{E}(t)$ меняется по гармоническому закону, также представленному на

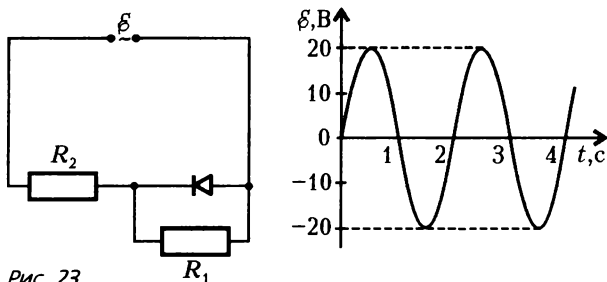


Рис. 23

рисунке. Изобразите графически зависимость напряжения $U(t)$ на резисторе R_2 от времени.

5. На длинную цилиндрическую проволочную катушку (соленоид) надет замкнутый проволочный виток. Если через соленоид пропускать переменный ток, в витке возникает индукционный ток. Во сколько раз k изменится сила индукционного тока, если диаметр проволоки, из которой сделан виток, увеличить в 2 раза?

6. Небольшой брусок толкнули вверх по наклонной плоскости, сообщив начальную скорость $v_0 = 2$ м/с. Брусок поднялся на максимальную высоту $h = 15$ см. Какова скорость v_1 бруска при возвращении к основанию наклонной плоскости? Принять $g = 10$ м/с².

7. При температуре $t_0 = 0$ °С почва покрыта слоем снега толщиной $H = 10$ см. Какой минимальной толщины h слой дождевой воды с температурой $t_1 = 4$ °С может полностью растопить этот снег? Удельная теплота плавления снега $\lambda = 3,4 \cdot 10^5$ Дж/кг, его плотность $\rho = 500$ кг/м³, удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), а ее плотность $\rho_0 = 10^3$ кг/м³.

8. В вертикальном цилиндрическом сосуде радиусом $R = 10$ см находится жидкость. В ней плавает шар радиусом $r = 5$ см. Плотность материала шара в $k = 2$ раза меньше плотности жидкости. На сколько понизится уровень жидкости в сосуде, если шар из нее удалить?

9. Поверхность солнечной батареи, площадь которой $S = 1$ м², расположена так, что солнечные лучи падают на нее по нормали. Найдите коэффициент полезного действия батареи η , если известно, что батарея обладает (выдает на выходе) электричес-

кой мощностью $P = 20$ Вт, а плотность потока энергии солнечных лучей, падающих на батарею, $I = 1,4 \cdot 10^3$ Дж/(м² · с).

10. Небольшой груз подвешен на пружинке жесткостью $k = 40$ Н/м перед собирающей линзой с оптической силой $D = 5$ дптр (рис.24). Расстояние от линзы до груза $d = 30$ см. Груз совершает вертикальные колебания. Энергия

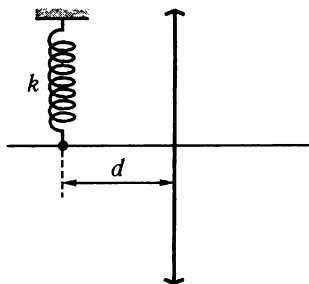


Рис. 24

этих колебаний $W = 2 \cdot 10^{-3}$ Дж. Найдите амплитуду колебаний A изображения груза, даваемого линзой.

Вариант 3

1. Сформулируйте закон сохранения импульса для системы материальных точек.

2. Что такое инерциальная система отсчета?

3. Проволока изогнута в виде рамки квадратной формы. Сопротивление одной из сторон этой рамки $r = 2$ Ом. К соседним вершинам рамки подключают источник тока. Каково сопротивление R образовавшейся внешней цепи? Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

4. На рисунке 25 представлена p - V -диаграмма изменения состояния некоторого количества идеального газа. Укажите, на каких участках этого циклического процесса газ получал тепло. Участки 1-2, 2-3, 4-1 – прямые, а участок 3-4 – часть гиперболы.

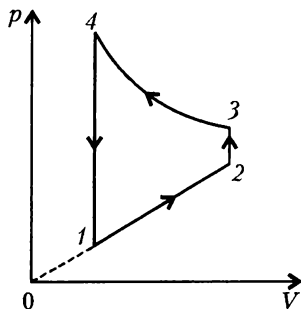


Рис. 25

5. Расстояние от предмета до тонкой рассеивающей линзы в $n = 2$ раза меньше ее фокусного расстояния. Определите линейное увеличение изображения предмета Γ .

6. Тело, брошенное вертикально вверх с поверхности земли, оказывается на высоте $h = 15$ м дважды. Промежуток времени между этими моментами времени $\Delta t = 2$ с. Определите начальную скорость тела v_0 . Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Сопротивлением воздуха пренебречь.

7. По гладкой поверхности стола может скользить брусok

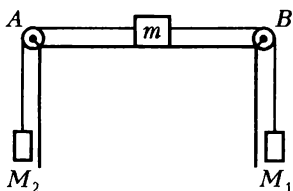


Рис. 26

массой $m = 2$ кг, к бруску прикреплены нити, перекиннутые через блоки A и B , с грузами $M_1 = 3$ кг и $M_2 = 2$ кг (рис. 26). Определите натяжение нити, на которой закреплен груз массой M_2 . Нити считать невесомыми и нерастяжимыми. Массой блоков пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

8. На поверхности воды большого бассейна, имеющего плоское отражающее дно, плавает круглый плот радиусом $R = 2$ м. Снизу в центре пловца помещен точечный источник света. Определите максимальную глубину бассейна h , при которой свет, отраженный дном бассейна, не будет выходить за пределы поверхности воды бассейна. Показатель преломления воды $n = 1,3$.

9. Закрытый вертикальный цилиндрический сосуд разделен на две части горизонтальным подвижным поршнем, который может перемещаться в сосуде без трения. В обеих частях сосуда находятся одинаковые массы идеального газа при температуре T_1 . Объем нижней части сосуда в k раз меньше, чем верхней. Определите, каким станет отношение объемов в сосуде n при повышении температуры в обеих частях от T_1 до T_2 .

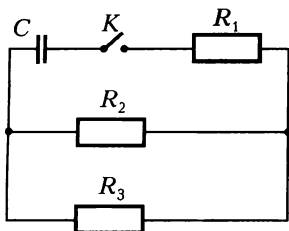


Рис. 27

10. В цепи, изображенной на рисунке 27, конденсатор емкостью $C = 2$ мкФ при разомкнутом ключе K заряжен до разности потенциалов $U = 200$ В от внешнего источника. Сопротивления $R_1 = R_2 = R_3 = R = 1$ Ом. Определите количество теплоты Q , выделившееся на сопротивлении R_3 за все время разрядки конденсатора после замыкания ключа K .

Публикацию подготовили С.Аввакумов, А.Бегуни,
П.Бородин, Е.Григорьев, Д.Денисов, А.Зотеев, Л.Крицков,
Г.Медведев, В.Парфенов, В.Погожев, А.Разгулин,
И.Сергеев, А.Склянкин, В.Ушаков, С.Чесноков, Е.Шикин,
Б.Щедрин

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ФИЗИКА

Олимпиада Федерального агентства по атомной энергии РФ

Вариант 1

1. Постройте изображение точечного источника S в тонкой собирающей линзе. Источник по отношению к линзе расположен так, как показано на рисунке 1.

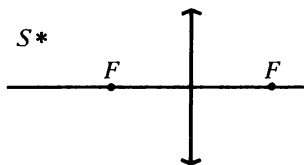


Рис. 1

2. При изобарическом охлаждении температура газа уменьшилась от значения T_1 до значения T_2 , при этом объем газа уменьшился на ΔV . Найдите конечный объем газа.

3. Тело, двигаясь с постоянным ускорением из состояния покоя, прошло расстояние s за время τ . Какую скорость имело тело в тот момент, когда оно прошло n -ю часть этого расстояния?

4. Веревка выдерживает груз максимальной массы m_1 при его движении с некоторым ускорением, направленным вверх, и груз максимальной массы m_2 при его движении с ускорением в n раз меньше первого по величине и направленным вниз (рис.2).

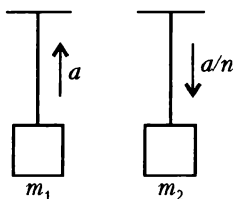


Рис. 2

Груз какой максимальной массы можно подвесить к веревке в покое?

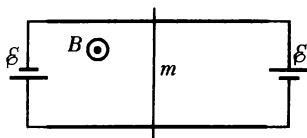


Рис. 3

5. Параллельные горизонтальные рельсы с сопротивлением единицы длины ρ и длиной L закреплены на расстоянии l друг от друга (рис.3). К их концам присоединены две одинаковые батареи с ЭДС \mathcal{E} . На рельсы кладут перемычку массой m ,

которая может скользить вдоль них. Вся система находится в вертикальном магнитном поле с индукцией B . Найдите период малых колебаний переключки около положения равновесия. Трением, сопротивлением переключки, источников и проводов, а также индуктивностью цепи пренебречь.

Вариант 2

1. Одну пятую часть пути автомобиль ехал со скоростью $v_1 = 40$ км/ч, а оставшуюся часть — со скоростью $v_2 = 60$ км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всем пути.

2. В начальном состоянии объем, давление и абсолютная температура газа равны p_0 , V_0 и T_0 соответственно. Сначала газ подвергают изобарическому расширению до объема V_1 , а затем — изохорическому нагреванию до давления p_1 . Найдите температуру газа в конечном состоянии.

3. В каком из резисторов в схеме, представленной на рисунке 4, выделяется наибольшая мощность, если $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 4$ Ом, $R_5 = 5$ Ом, $R_6 = 6$ Ом?

Найдите эту мощность, если к схеме приложено напряжение $U = 100$ В.

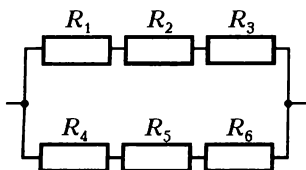


Рис. 4



Рис. 5

4. Тело бросили под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 (рис.5). Тело падает на ступеньку высотой h . Под каким углом β тело подлетит к ступеньке?

5. Тонкая металлическая пластинка площадью S залита слоем жидкого диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ и плотностью ρ так, что толщина слоя диэлектрика много меньше линейных размеров пластинки (рис.6).



Рис. 6

Пластинку заряжают зарядом $+Q$. Поднимется или опустится уровень жидкости и если да, то на сколько?

Вариант 3

1. Во сколько раз изменится сила взаимодействия двух точечных электрических зарядов, если величины зарядов увеличить в n раз?

2. Один моль одноатомного идеального газа имеет температуру T . Газ изохорически нагревают так, что его температу-

ра возрастает в n раз. Какое количество теплоты сообщили газу?

3. Скорость лодки относительно воды вдвое больше скорости течения. Во сколько раз большее время занимает поездка между двумя пунктами против течения, чем по течению?

4. На краю горизонтального диска находится тело массой m , привязанное нитью длиной l к оси диска (рис.7). Нить составляет угол α с осью диска. Диск вращается вокруг своей оси, при этом тело вращается вместе с ним. При какой угловой скорости тело оторвется от диска?

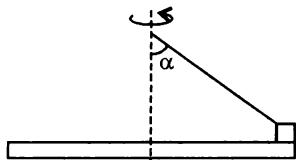


Рис. 7

5. Параболическое зеркало (рис.8) образовано вращением параболы $y = \beta x^2$ вокруг оси OY (β – известное число). На зеркало параллельно оси OY направили два луча: один на расстоянии l от оси, другой – на расстоянии $2l$ от оси. Какой из лучей после отражения от поверхности зеркала пересечет ось OY ближе к началу координат и на сколько? Найдите расстояние от точки пересечения этого луча с осью OY и началом координат.

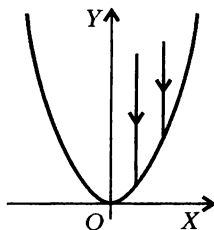


Рис. 8

Публикацию подготовил С.Муравьев

МОСКОВСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Найдите значение выражения $\left(18^{\log_{18} \sqrt[3]{3}}\right)^5 - \sin \frac{5\pi}{2}$.

2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 5^{1-3x} < 25, \\ x^2 + x \leq 12. \end{cases}$$

3. Решите уравнение $\left| \frac{8}{2-x} \right| - x = 0$.

4. Найдите критические точки функции

$$f(x) = 13 \sin x + 4 \cos x - 13x \cos x + 5e.$$

5. Найдите область определения функции $y = 0,6^{\frac{1}{1-3x}} + 0,6$.

6. Вычислите $\sqrt[12]{2^8 3^{10}} \sqrt[12]{2^4 3^{14}}$.

7. 70% числа $a/5$ равны 35. Найдите число a .

8. Основанием пирамиды $MABCD$ является квадрат, а ее боковое ребро MB перпендикулярно плоскости основания. Найдите площадь сечения, проходящего через точку O пересечения диагоналей основания перпендикулярно ребру MD , если $AB = 2$, $MB = 2\sqrt{2}$.

Вариант 2

(факультет физики и информационных технологий)

1. Вычислите $\log_3 162 - \log_3 2 + \cos 360^\circ$.

2. Решите неравенство $3 - \log_4 x - \log_4 (x - 12) < 0$.

3. Решите уравнение $2 \cos x = -\sqrt{3}$.

- Найдите $f'(2)$, если $f(x) = (3x - 4)^5$.
- Решите уравнение $x \cdot 2^{3x} - 8 \cdot 2^{3x} = 0$.
- 125% числа b равны 400. Найдите число $5b$.
- Найдите наибольшее целое значение функции $y = -3,49 \sin 8x$.
- Сторона ромба равна 30, а одна из его диагоналей равна 36. Найдите площадь ромба.

Вариант 3

(химический факультет)

- Вычислите $\log_7 196 - \log_7 4 - \cos 270^\circ$.
- Решите неравенство $4 - \log_3(x - 24) - \log_3 x < 0$.
- Решите уравнение $-\sqrt{2} = 2 \cos x$.
- Найдите $f'(4)$, если $f(x) = (1 - 0,5x)^{12} - \pi$.
- Решите уравнение $x \cdot 2^{4x} - 32 \cdot 2^{4x} = 0$.
- 180% числа a равны 72. Найдите число $5a$.
- Найдите наименьшее целое значение функции $y = -3,28 \sin 9x$.
- Найдите периметр ромба, если его диагонали равны 16 и 12.

Вариант 4

(факультет технологии и предпринимательства)

- Вычислите $\log_2 80 - \log_2 10 + \log_3 81$.
- Решите неравенство $3 - \log_2(11 - 4x + x^2) > 0$.
- Решите уравнение $2 \sin 2x = -\sqrt{3}$.
- Найдите $f'(1)$, если $f(x) = (2 - 3x)^6 - e$.
- Решите уравнение $x \cdot 3^{2x} + 81 \cdot 3^{2x} = 0$.
- 120% числа c равны 60. Найдите число $4c$.
- Найдите наименьшее значение функции $y = 7,4 \cos 6x$.
- Найдите сторону ромба, если его площадь равна 12, а одна из диагоналей равна 4.

Задачи устного экзамена

(математический факультет)

- Решите неравенство $\sqrt{6x - 5 - x^2} - 8 + 2x > 0$.
- Решите уравнение $|x \sin x| - x = 0$.
- Решите систему

$$\begin{cases} |\sin x| + |\sin z| = \operatorname{tg} 3\pi, \\ x \cdot z = \pi^2. \end{cases}$$

4. Найдите $\sin^3 x + \cos^3 x$, если $\sin x + \cos x = a$.
5. Решите неравенство $(x^2 - 4x - 5) \log_{\sqrt{x}} x^2 \leq 0$.
6. Решите уравнение $\log_{16} \sin x + \log_4 \sin x + \log_2 \sin x = -\frac{7}{8}$.
7. Вычислите $(\log_{\sqrt{15}} 45 + \log_{\sqrt{15}} 5) \arcsin\left(\sin \frac{11\pi}{4}\right)$.
8. Постройте график функции $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{|1 - x|}$.
9. Около треугольника со стороной a и противолежащим углом 135° описана окружность длины 24π . Найдите a .
10. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD пересекаются в точке O . Площади треугольников AOB и BOC равны 6 и 3. Найдите площадь трапеции.

ФИЗИКА

Факультет физики и информационных технологий

Письменный экзамен

Экзаменационное задание состоит из двух частей. Первая часть содержит 15 задач с выбором из трех ответов. За каждый правильный ответ начисляется 1 балл. Вторая часть содержит 5 задач, требующих развернутого решения. За каждую полностью решенную задачу начисляется 2 балла, за решение с недочетами оценка может быть снижена на 1 балл. Общая оценка за экзамен выставляется в зависимости от суммы набранных баллов.

При решении задач следует использовать следующие округленные значения физических констант: ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$, универсальная газовая постоянная $R = 8,3 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$, элементарный заряд $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$, скорость света $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

Вариант 1

Часть 1. Выберите правильный ответ

1. Зависимость координаты x точки от времени t описывается функцией $x = 3t - 5t^2$ (x – в метрах, t – в секундах). Скорость точки в проекции на ось x изменяется по закону:

1) $v = 3 - 10t$; 2) $v = 3 - 5t$; 3) $v = 5t$.

2. Тело движется по окружности радиусом 2 м со скоростью 1 м/с. Период его обращения равен:

1) 3,14 с; 2) 6,28 с; 3) 12,56 с.

3. При растяжении пружины на 20 см сила упругости составляет 20 Н. Жесткость пружины равна:

1) 100 Н/м; 2) 40 Н/м; 3) 1 Н/м.

4. Из колодца глубиной 5 м достают воду в ведре. Масса ведра с водой 10 кг. Работа силы тяжести при этом равна:

1) 500 Дж; 2) -500 Дж; 3) -50 Дж.

5. В начальном состоянии объем газа 1 м^3 , давление 20 кПа. В конечном состоянии объем 3 м^3 , давление 10 кПа. Температуру газа:

1) не изменилась; 2) уменьшилась; 3) увеличилась.

6. Работа газа при адиабатном расширении равна 200 Дж. Внутренняя энергия газа при этом:

1) не изменилась; 2) увеличилась на 200 Дж; 3) уменьшилась на 200 Дж.

7. При уменьшении внешнего давления температура кипения жидкости:

1) уменьшается; 2) увеличивается; 3) не изменяется.

8. Металлическому шару радиусом R сообщен заряд q . Отношение напряженности электрического поля на поверхности шара к напряженности на расстоянии $3R$ от центра равно:

1) 3; 2) 9; 3) $1/3$.

9. Электрическая энергия, запасенная в конденсаторе емкостью 2 мкФ, заряженному до напряжения 100 В, равна:

1) 0,2 Дж; 2) 0,01 Дж; 3) 0,2 мДж.

10. Если диаметр провода уменьшить в 2 раза при неизменной длине провода, то его сопротивление:

1) уменьшится в 2 раза; 2) увеличится в 2 раза; 3) увеличится в 4 раза.

11. Чему равно сопротивление электрической лампы, потребляющей мощность 100 Вт при напряжении 200 В:

1) 4 Ом; 2) 50 Ом; 3) 400 Ом?

12. Проводник длиной 2 м расположен параллельно линиям индукции магнитного поля 0,02 Тл. При силе тока в проводнике 25 А на него действует сила Ампера:

1) 1 Н; 2) 0,25 Н; 3) 0.

13. Точечный источник света расположен в фокусе собирающей линзы. После преломления лучи образуют:

1) расходящийся пучок; 2) параллельный пучок; 3) сходящийся пучок.

14. Сила тока в цепи меняется со временем по закону $I = 14 \cos 314t$ (А). Действующее значение силы тока равно:

1) 20 А; 2) 14 А; 3) 10 А.

15. Натрий $^{22}_{11}\text{Na}$ превращается в $^{22}_{12}\text{Mg}$ в результате:

1) альфа-распада; 2) бета-распада; 3) одного альфа- и одного бета-распада.

Часть 2. Решите задачи

16. Небольшое тело толкнули вверх вдоль гладкой наклонной плоскости, сообщив ему начальную скорость $v = 2$ м/с. Какой путь пройдет тело вверх по наклонной плоскости, если угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30^\circ$?

17. Свинцовый шар упал с высоты $h = 26$ м. При абсолютно неупругом соударении с землей 80% кинетической энергии превратилось во внутреннюю энергию шара. На сколько градусов он нагрелся? Удельная теплоемкость свинца $c = 130$ Дж/(кг · К). Сопротивление воздуха не учитывать.

18. Тепловая машина с КПД $\eta = 20\%$ отдает холодильнику за цикл $Q = 80$ Дж тепла. Чему равна полезная работа, совершаемая машиной за цикл?

19. При замыкании источника с ЭДС $\mathcal{E} = 30$ В и внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом на внешнюю нагрузку напряжение на зажимах источника стало $U = 28$ В. Найдите силу тока в цепи.

20. На каком расстоянии от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 30$ см надо поместить предмет, чтобы получить на экране изображение, увеличенное в 3 раза?

Вариант 2

Часть 1. Выберите правильный ответ

1. Лыжник, скатываясь с горы с постоянным ускорением, за первые 3 с проехал 9 м. Ускорение лыжника равно:

1) 2 м/с²; 2) 3 м/с²; 3) 1 м/с².

2. Стержень длиной 1 м вращается с частотой 2 оборота в секунду вокруг оси, проходящей через его конец. Скорость второго конца стержня равна:

1) $3,14$ м/с; 2) $6,28$ м/с; 3) $12,56$ м/с.

3. Тело массой 1 кг падает с ускорением 7 м/с². Сила сопротивления воздуха при этом равна:

1) 3 Н; 2) 7 Н; 3) 17 Н.

4. Стальной шарик массой m падает вниз на стеклянную пластину со скоростью v и отскакивает вверх с такой же по модулю скоростью. Изменение его импульса по модулю равно:

1) mv ; 2) $2mv$; 3) 0.

5. При постоянном объеме давление газа увеличилось в 2 раза. Начальная температура газа $+27^\circ\text{C}$. Конечная температура:

1) $+13,5^\circ\text{C}$; 2) $+54^\circ\text{C}$; 3) $+327^\circ\text{C}$.

6. При изотермическом расширении идеального газа его объем увеличивается в 2 раза. При этом внутренняя энергия газа:

1) не меняется; 2) увеличивается в 2 раза; 3) уменьшается в 2 раза.

7. Тепловой двигатель за цикл получает от нагревателя 4 кДж тепла и отдает в окружающую среду 3 кДж. КПД двигателя равен:

1) 0,25; 2) 0,75; 3) 1/3.

8. Два одинаковых металлических шарика с зарядами +3 нКл и +1 нКл помещены на некотором расстоянии друг от друга. Шарiki привели в соприкосновение и развели на прежнее расстояние. Сила их взаимодействия:

1) увеличилась в 3 раза; 2) уменьшилась в 3 раза; 3) увеличилась в $4/3$ раза.

9. Напряженность однородного электрического поля 100 В/м. Разность потенциалов между двумя точками, расположенными на одной силовой линии на расстоянии 5 см, равна:

1) 20 В; 2) 5 В; 3) 0,5 В.

10. Если резисторы с сопротивлениями 20 Ом и 30 Ом соединить параллельно, то получится сопротивление:

1) 12 Ом; 2) 25 Ом; 3) 50 Ом.

11. Электроплита потребляет мощность 2000 Вт при напряжении 200 В. Сила тока в электроплите:

1) $4 \cdot 10^5$ А; 2) 0,1 А; 3) 10 А.

12. Сила тока в катушке индуктивностью 0,1 Гн равномерно увеличивается от нуля до 2 А за время 0,02 с. В катушке возникает ЭДС самоиндукции:

1) 1000 В; 2) 100 В; 3) 10 В.

13. Свет переходит из воздуха в стекло с показателем преломления 1,5. При этом длина световой волны:

1) уменьшается в 1,5 раза; 2) увеличивается в 1,5 раза; 3) не изменяется.

14. Как изменится период собственных электромагнитных колебаний контура, если индуктивность катушки увеличить в 2 раза и емкость конденсатора увеличить в 8 раз:

1) увеличится в 4 раза; 2) увеличится в 16 раз; 3) уменьшится в 4 раза?

15. При бета-распаде число протонов в ядре:

1) уменьшается на один; 2) уменьшается на два; 3) увеличивается на один.

Часть 2. Решите задачи

16. Какую скорость, направленную вертикально вниз, надо сообщить мячу на высоте $h = 2$ м, чтобы после абсолютно упругого удара о землю он подпрыгнул на высоту $H = 3,8$ м?

17. Вагон, катившийся по горизонтальным рельсам, столкнулся с неподвижным вагоном вдвое большей массы. После соударения вагоны стали двигаться вместе. Найдите отношение

кинетической энергии вагонов после соударения к первоначальной энергии первого вагона.

18. С какой наименьшей скоростью должна лететь свинцовая дробинка, чтобы при ударе о препятствие она расплавилась? Считать, что $\alpha = 80\%$ кинетической энергии превратилось во внутреннюю энергию дробинки, а температура дробинки до удара была $t = 127^\circ\text{C}$. Температура плавления свинца $t_{\text{пл}} = 327^\circ\text{C}$, удельная теплоемкость свинца $c = 130 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, удельная теплота плавления свинца $\lambda = 23 \text{ кДж}/\text{кг}$.

19. На резисторе сопротивлением $R = 14 \text{ Ом}$, подключенном к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 15 \text{ В}$, выделяется тепловая мощность $P = 14 \text{ Вт}$. Чему равно внутреннее сопротивление источника?

20. Идеальный колебательный контур содержит катушку индуктивностью $L = 1 \text{ Гн}$ и конденсатор емкостью $C = 1 \text{ пкФ}$. Максимальная сила тока при собственных электромагнитных колебаниях в контуре $I_m = 10 \text{ мкА}$. Каково максимальное напряжение на конденсаторе?

*Публикацию подготовили Е.Деза, С.Жданов,
А.Казанцева, Б.Кукушкин*

**МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)**

МАТЕМАТИКА

Олимпиада «Физтех-2008», март

Вариант 1

1. Решите неравенство $\log_{\left(\frac{3-x}{1-x}\right)}(9-x) \leq 2$.

2. Решите уравнение $\frac{\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x}{|\cos 2x|} = \frac{3}{4}$.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y + \sqrt{\frac{y}{x+y}} = \frac{42}{x+y}, \\ xy - y = 16. \end{cases}$$

4. В треугольнике ABC медиана $BM = 4$, угол ABM равен $\arctg \frac{1}{4}$, угол CBM равен $\arctg \frac{3}{5}$. Найдите стороны AB , BC и биссектрису BE треугольника ABC .

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x^4 - 4x^2 + y = \ln y, \\ \arcsin x + \arctg y = 0. \end{cases}$$

6. В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Сфера ω радиуса $\frac{28}{23}$ с центром O касается ребер AS , BS , AD , BC пирамиды в точках K , L , M , N соответственно, пересекает ребро AB в точках P и Q и касается грани CDS . Известно, что прямая SO перпендикулярна плоскости $ABCD$ и пересекает ее в точке H , $\frac{AB}{PQ} = \sqrt{\frac{33}{17}}$, $\frac{BL}{AS} = \frac{1}{4}$. Найдите $\angle SBA$, $\angle SAH$, высоту пирамиды и ее объем.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\sqrt{9 + \sqrt{8} \operatorname{tg} x} + 3 \cos x = 0.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy + y^2 - 2x^2 + 10x + 8y + 12 = 0, \\ x^2 - y^2 + 7 = 0. \end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{(13+2x)}(4x^2 + 8x - 5)} + \sqrt{\log_{(4x^2+8x-5)}(13+2x)^2} \leq 1 + \sqrt{2}.$$

4. Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O , а ее высота равна 4. Окружность радиуса $\frac{3}{4}$ с центром в точке O касается меньшего основания трапеции BC и боковой стороны трапеции CD . Найдите основание трапеции BC и диагональ трапеции.

5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$|ax^2 + 4| = |3ax| + |a|$$

имеет хотя бы одно действительное решение.

6. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, причем $AB = 3$, $BC = 2$. Пусть N – середина SB , M – середина SC , причем $BN = MC = 3MN$. Каким может быть минимальный радиус сферы, описанной около пирамиды $SABCD$? Найдите объем пирамиды $SABCD$, вписанной в эту сферу (минимального радиуса).

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. На гладкой горизонтальной поверхности стола покоятся незакрепленные горки массами $4m$ и $5m$ (рис.1). На вершине

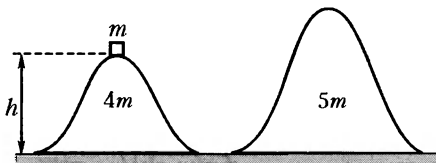


Рис. 1

горки массой $4m$ на высоте h лежит монета массой m . От незначительного толчка монета съезжает с горки в направлении другой горки. 1) Найдите скорость монеты на столе. 2) На какую максимальную высоту сможет подняться монета на горке массой $5m$? Поверхности горок гладкие. Горки имеют плавный переход к поверхности стола. Направления всех движений находятся в одной вертикальной плоскости.

2. С газообразным гелием проводится циклический процесс (рис.2), состоящий из процесса 1–2 с линейной зависимостью давления от объема, изобарического сжатия 2–3 и изохорического нагревания 3–1. Известно, что объем в состоянии 2 в три раза больше, чем в состоянии 1. Найдите отношение работы газа в цикле 1–2–3–1 к количеству теплоты, подведенному к газу в изохорическом процессе 3–1.

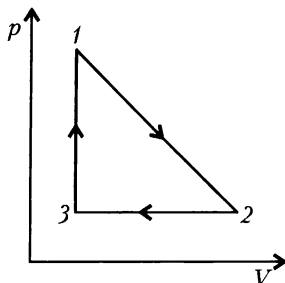


Рис. 2

3. В цепи, показанной на рисунке 3, емкость каждого конденсатора равна C . Левый конденсатор заряжен до напряжения U_0 , правой — до напряжения $2U_0$. У обоих конденсаторов положительный заряд находится на верхней обкладке. Какое количество теплоты выделится в резисторе после замыкания ключа?

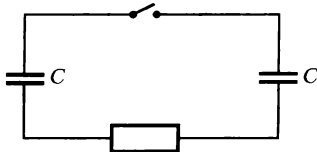


Рис. 3

4. В схеме, показанной на рисунке 4, все элементы можно считать идеальными. Параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа K ток в цепи отсутствовал. Ключ замыкают на некоторое время, а затем размыкают. Оказалось, что после размыкания ключа через катушку протек заряд q_0 . 1) Найдите ток через катушку сразу после размыкания ключа. 2) Какой заряд протек через источник за время, пока ключ был замкнут?

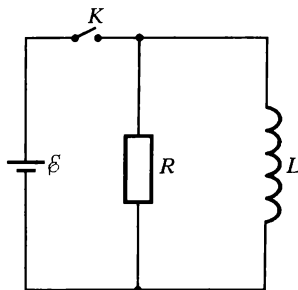


Рис. 4

5. По столу катится шарик со скоростью v (рис.5). В противоположном направлении со скоростью $2v$ перемещают поступательно плос-

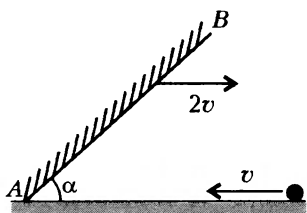


Рис. 5

кое зеркало AB . Поверхность зеркала составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с поверхностью стола. Скорости шарика и зеркала перпендикулярны ребру двугранного угла, образованного поверхностями зеркала и стола.

- 1) Найдите скорость шарика относительно зеркала и покажите ее направление, нарисовав рисунок. 2) С какой скоростью (по модулю) относительно стола перемещается изображение шарика в зеркале?

Вариант 2

1. Шарик, движущийся со скоростью v по гладкой горизонтальной поверхности, налетает на лежащий неподвижно на той же поверхности кубик. После неупругого удара шарик остановился, а кубик стал двигаться поступательно со скоростью $v/3$. Какая часть первоначальной кинетической энергии шарика перешла в тепло?

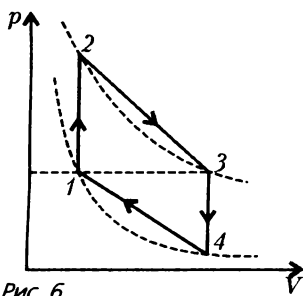


Рис. 6

После неупругого удара шарик остановился, а кубик стал двигаться поступательно со скоростью $v/3$. Какая часть первоначальной кинетической энергии шарика перешла в тепло?

2. С v молями идеального газа проводится циклический процесс (рис.6), состоящий из двух изохор $1-2$ и $3-4$ и двух процессов $2-3$ и $4-1$ с линейной зависимостью давления от объема. Температура газа в состояниях 1 и 4 равна T , а в состояниях 2 и 3 она равна $2T$. Найдите работу, совершаемую газом в цикле $1-2-3-4-1$, если давления в состояниях 1 и 3 равны.

3. Четыре одинаковых маленьких шарика с массой m и зарядом q каждый удерживают в вершинах правильного тетраэдра с ребром a . Один шарик отпускают, продолжая удерживать остальные неподвижно. Какую скорость наберет освобожденный шарик, удалившись на большое расстояние?

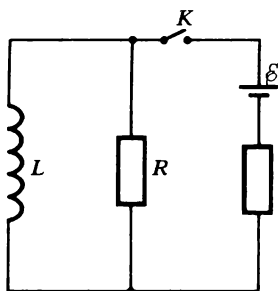


Рис. 7

Какую скорость наберет освобожденный шарик, удалившись на большое расстояние?

4. Электрическая цепь (рис.7) состоит из катушки индуктивностью L , резистора сопротивлением R , батарейки с ЭДС ϵ и неизвестным внутренним сопротивлением. Ключ K на не-

которое время замыкают, а затем размыкают. За время пока ключ был замкнут, в цепи выделилось количество теплоты Q_1 , а после размыкания ключа в цепи выделилось количество теплоты Q_2 . 1) Найдите ток через катушку в момент размыкания ключа. 2) Найдите заряд, протекший через катушку пока ключ был замкнут.

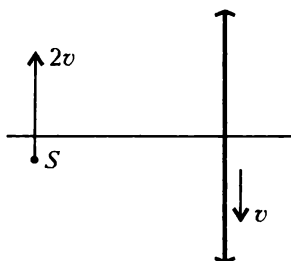


Рис. 8

5. Мошка S ползет перпендикулярно главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием F , находясь вблизи главной оптической оси на расстоянии $4F/3$ от линзы (рис.8). Линза перемещается поступательно в противоположном направлении перпендикулярно главной оптической оси. Скорость линзы $v = 1$ мм/с, скорость мошки $2v$. Мошка и главная оптическая ось линзы всегда находятся в плоскости рисунка. 1) Найдите скорость мошки относительно линзы. 2) С какой скоростью движется изображение мошки относительно неподвижного экрана?

Вариант 3

1. Дифференциальный ворот представляет собой два скрепленных соосных цилиндра радиусами $R = 10$ см и $r = 8$ см, на которые намотан трос (рис.9). Трос перекинут через подвижный блок и его концы закреплены на цилиндрах. При вращении рукоятки OA длиной $L = 20$ см вокруг неподвижной горизонтальной оси цилиндров O трос наматывается на больший цилиндр и сматывается с меньшего, а груз, подвешенный к подвижному блоку, поднимается. 1) Найдите минимальную силу F , которую необходимо приложить к рукоятке ворота, чтобы поднимать груз массой $m = 140$ кг. 2) Какой скорости достигнет этот груз за $t = 2$ с, начав движение из состояния покоя, если силу F увеличить на 0,4%? Массой цилиндров, рукоятки, троса, подвижного блока и трением в осях пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с².

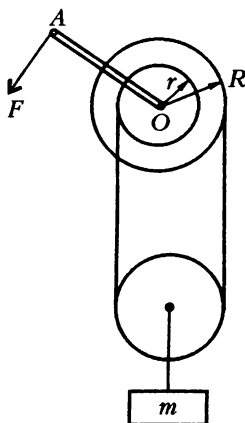


Рис. 9

2. Теплоизолированный горизонтальный цилиндр с гладки-

ми стенками делится непроводящим тепло поршнем на две части, в которых находятся по одному молу гелия при температуре $T_0 = 300 \text{ К}$. В левой части цилиндра на некоторое время включается нагреватель, в результате поршень перемещается, и объем правой части цилиндра уменьшается в 2 раза. Найдите количество теплоты, переданное газу нагревателем. Известно, что давление p и объем V газа в правой части цилиндра связаны соотношением $p^3 V^5 = \text{const}$ (адиабатический процесс).

3. Шарик массой m с зарядом q находится на расстоянии R от второго одноименно заряженного шарика массой $3m$. Неподвижные вначале шарики одновременно отпускают, и они разлетаются. В момент, когда расстояние между шариками стало $4R$, скорость шарика массой m достигла v . 1) Найдите скорость второго шарика в этот момент. 2) Найдите заряд второго шарика. Размеры шариков малы по сравнению с R . Силы гравитации не учитывайте.

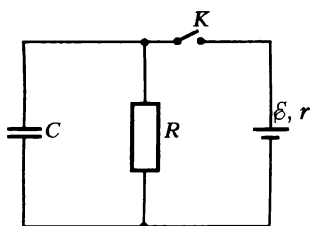


Рис. 10

4. Электрическая цепь (рис.10) состоит из батарейки с ЭДС ε и внутренним сопротивлением r , конденсатора емкостью C и резистора сопротивлением $R = 2r$. Ключ K замыкают, а затем размыкают в тот момент, когда источник развивает мгновенную мощность P . 1) Найдите ток, текущий через конденсатор непосредственно перед размыканием ключа. 2) Какое количество теплоты выделится в схеме после размыкания ключа?

5. Вертолет фотографируют с расстояния $d_1 = 36 \text{ м}$ с помощью объектива с фокусным расстоянием $F_1 = 45 \text{ мм}$. Модель вертолета, выполненную в масштабе $1 : 200$, фотографируют с помощью объектива с фокусным расстоянием $F_2 = 90 \text{ мм}$. На пленке размеры изображений вертолета и модели одинаковы. На каком расстоянии d_2 от объектива находилась модель вертолета? Объектив считать тонкой линзой, от которой отсчитываются все расстояния.

Вариант 4

1. С балкона вертикально вверх бросают мяч. Через время τ скорость летящего вверх мяча уменьшается на 20%. С какой высоты был произведен бросок, если в момент удара о землю скорость мяча в два раза превышала начальную? Сопротивление воздуха не учитывать.

2. Смесь гелия ($M_r = 4$ г/моль) и кислорода ($M_k = 32$ г/моль) имеет при давлении $p = 10^5$ Па и температуре $T = 300$ К плотность $\rho = 1$ кг/м³. 1) Найдите отношение числа молекул кислорода к числу молекул гелия. 2) Какой станет при том же объеме плотность смеси, если из нее удалить две трети молекул кислорода?

3. Параллельно соединенные резисторы с сопротивлениями $R = 25$ Ом и $2R$ соединены последовательно

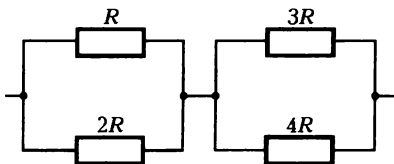


Рис. 11

с другими параллельно соединенными резисторами с сопротивлениями $3R$ и $4R$ (рис. 11). Цепь подключена к сети с постоянным напряжением. В резисторе с сопротивлением R выделяется мощность $P = 49$ Вт. 1) Найдите ток через резистор сопротивлением $2R$. 2) Какая мощность выделяется в резисторе с сопротивлением $4R$?

4. Электрическая цепь состоит из идеальной батарейки с ЭДС \mathcal{E} , катушки индуктивностью L , конденсатора емкостью C и резистора с неизвестным сопротивлением (рис. 12). Ключ K замыкают на время τ , а затем размыкают. За время, пока ключ был замкнут, через источник протек заряд q . 1) Какое количество теплоты выделилось в цепи, пока ключ был замкнут? 2) Какое количество теплоты выделилось в цепи после размыкания ключа?

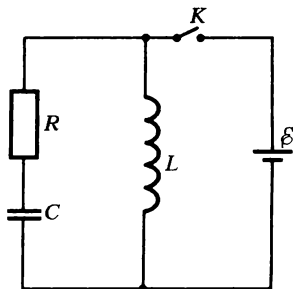


Рис. 12

5. Сторона AB квадрата $ABCD$ расположена на оптической оси собирающей линзы, причем расстояние от линзы до точки A в два раза больше фокусного расстояния линзы. Линза создает действительное изображение квадрата. Площадь изображения составляет $3/8$ площади квадрата $ABCD$. С каким увеличением изображается сторона BC ?

Публикацию подготовили
Д.Александров, Р.Константинов, М.Шабунин

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФИЗИКА

Физический факультет

Письменный экзамен

Каждый вариант состоял из задач трех типов. Первые три задачи – расчетные, различной степени трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения ориентироваться в непривычной или усложненной ситуации.

Четвертая задача – задача-оценка. Для ее решения необходимо разобраться в рассматриваемом физическом явлении, сформулировать простую (так как нужна только оценка) модель этого явления, выбрать разумные числовые значения величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивается, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача – задача-демонстрация, при решении которой необходимо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Среди различных факторов, влияющих на процесс, необходимо выделить главный.

Вариант 1

1. Груз массой m прикреплен к коробке пружиной, как показано на рисунке 1. Груз остается неподвижным относительно коробки, если она движется по горизонтали влево с ускорением $a < a_1$ или вправо с ускорением $a < a_2$. Найдите упругую

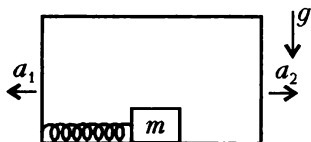


Рис. 1

силу со стороны пружины, действующую на груз, и коэффициент трения между грузом и дном коробки. Ускорение свободного падения g .

2. Луч света, падающий под углом 30° на плоскопараллельную пластинку, после отражения от ниж-

ней зеркальной грани выходит на некотором расстоянии от точки падения (рис.2). При увеличении угла падения вдвое вдвое увеличивается и расстояние между точками падения и выхода луча. Найдите показатель преломления пластинки.

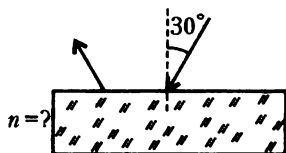


Рис. 2

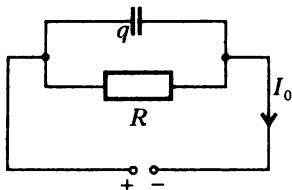


Рис. 3

3. Плоский конденсатор с воздушным зазором ($\epsilon = 1$) подсоединен параллельно резистору сопротивлением R (рис.3). При подаче на схему постоянного напряжения установившийся ток через источник равен I_0 , а заряд конденсатора q . Зазор между пластинами конденсатора заполнили веществом с удельным сопротивлением ρ . Сопротивление пластин много меньше сопротивления слоя вещества между ними. Какой ток теперь будет идти через источник? Напряжение источника остается прежним.

4. В летнюю жару в комнате с открытой форточкой включили кондиционер, так что в ней стало прохладно. Оцените, на сколько изменилась масса воздуха в комнате.

5. Через отверстие в стенке бутылки, расположенное немного выше уровня жидкости, проходит изогнутая трубка, доходящая до дна. Жидкость не выливается. Если в горлышко дунуть, вода начинает выливаться, пока почти вся не выльется. Объясните демонстрируемое явление.

Вариант 2

1. Сопротивления нижних резисторов в схеме на рисунке 4 одинаковы и равны R . Каково сопротивление верхнего резистора, если после замыкания ключа ток через источник возрос в полтора раза? Напряжение источника неизменно.

2. Плита массой m из металла плотностью ρ перекрывает выходное отверстие трубы сечением S так, что центры плиты и трубы совпадают (рис.5). Труба и плита находятся в воде, уровень которой выше выходно-

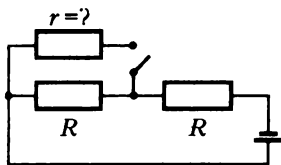


Рис. 4

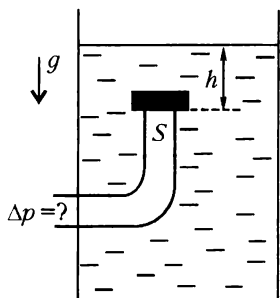


Рис. 5

от нагревателя, если скорость его течения на выходе такая же, как на входе? Молярная масса газа M .

4. Противоположно заряженные пятирублевые монеты расположены одна против другой, при этом зазор между ними равен их толщине. Оцените, во сколько раз изменится сила электрического притяжения, если монеты разнести на расстояние вытянутых рук.

5. Свет от точечного источника, пройдя линзу, образует круговое пятно на экране. Если загородить линзу наполовину сверху, то на экране видна верхняя половина пятна – полукруг, а если загородить снизу – нижняя половина. После перемещения линзы к источнику картина меняется. Теперь если загородить линзу сверху, то виден нижний полукруг, а если снизу – верхний. Объясните наблюдаемое явление.

Вариант 3

1. Луч света, падающий в точку A поверхности стеклянного шара под углом α к нормали, выходит в точке B (рис.6). Найдите показатель преломления стекла, если угол AOB равен φ (O – центр шара).

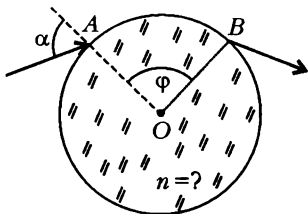


Рис. 6

2. Открытый сосуд с влажным воздухом поставили на весы. Через некоторое время при неизменных условиях в помещении масса сосуда с воздухом возросла на 1 г. Найдите массу водяного пара, который покинул сосуд. Средняя масса моля воздуха $M = 29$ г/моль.

3. На гладкой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонталью, лежат один на другом два одинаковых кирпича (рис.7). Верхний кирпич упирается в гладкую вертикальную

стену. При каком наименьшем коэффициенте трения между кирпичами нижний кирпич не будет смещаться?

4. Оцените разницу сил давления со стороны водителя на сидение автомобиля, когда он едет вдоль экватора на восток и на запад.

5. В центре вертикальной плоской катушки находится магнитная стрелка. Один раз плоскость катушки устанавливают перпендикулярно стрелке, а другой раз – вдоль стрелки. При включении тока в катушке в одном случае стрелка заметно отклоняется, а в другом – почти нет. Объясните демонстрируемое явление.

*Публикацию подготовили И.Воробьев, Г.Меледин,
Т.Рыбицкая, Г.Федотович, Б.Шварц*

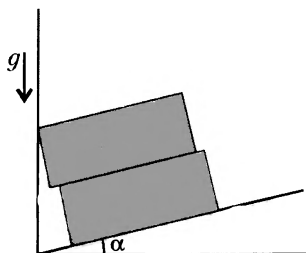


Рис. 7

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. А.И.ГЕРЦЕНА

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Факультеты математики, физики, информационных
технологий, технологии и предпринимательства

Вариант 1

1. Решите неравенство $\frac{x+6}{(x+1)(6-2x)} \leq 0$.

2. Сколько корней в промежутке $[0^\circ; 180^\circ]$ имеет уравнение $\cos^2 x - \cos x = 0$?

3. Одна из сторон треугольника меньше другой на 3 см. Высота делит третью сторону на отрезки длиной 5 см и 10 см. Найдите периметр треугольника.

4. Вычислите $2^{\log_4(\sqrt{3}-2)^2} + 3^{\log_9(2+\sqrt{3})^2}$.

5. Укажите целые решения неравенства

$$\left(\cos \frac{\pi}{3}\right)^{x^2-x-6} > 2^{x^2-x-6}.$$

6. Вода, поступающая через первую трубу, может наполнить бассейн за 6 часов, а вода, вытекающая из второй трубы, может его опорожнить за 15 часов. За сколько часов заполнится бассейн, если обе трубы работают одновременно?

7. Решите уравнение

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = 3.$$

8. Найдите наибольшее целое значение функции

$$g(x) = \frac{7}{2} \sqrt{(\sin x + \cos x)^2 + 2}.$$

9. При каких значениях параметра m корни уравнения $mx^2 - 3mx + 5 - m = 0$ различные и положительные?

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$(x^2 - 16) \left(\frac{1}{x+2} - \frac{2}{x+4} \right) - \frac{9x - 2x^2}{x^2 + 2x} = 0.$$

2. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt[4]{\log_3(3-x)} + 2.$$

3. Сколько решений уравнения $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$ принадлежат промежутку $[-180^\circ; 180^\circ]$?

4. Решите неравенство $\frac{(2x-3)^4(x+2)^3}{(5x-14)(3x+7)^2} \geq 0$.

5. Около круга радиуса $R = 2$ см описана равнобедренная трапеция, боковая сторона которой равна 5 см. Найдите площадь трапеции.

6. Найдите наибольшее решение уравнения

$$\frac{1}{x} + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \frac{7}{2}$$

в области $|x| < 1$.

7. Определите целые решения неравенства

$$x + 4 \leq \sqrt{-x^2 - 8x - 12}.$$

8. В зрительном зале 320 мест, расположенных одинаковыми рядами. После того как добавили ряд и в каждом ряду увеличили число мест на 4, в зрительном зале стало 420 мест. Сколько рядов стало в зрительном зале?

9. Определите количество решений уравнения $a + 2|x| - x^2 = 0$ в зависимости от параметра a .

*Публикацию подготовили
О. Корсакова, Т. Свенцицкая, Г. Хамов*

**РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НЕФТИ И ГАЗА ИМ. И. М. ГУБКИНА**

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите и вычислите при $a = \sqrt{2,5}$:

$$\frac{a^3 + 0,4\sqrt{0,4}}{a + \sqrt{0,4}} - \frac{a^3 - 0,4\sqrt{0,4}}{a - \sqrt{0,4}}.$$

2. Решите уравнение $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 25}} = \frac{1}{x\sqrt{6} - 5\sqrt{6}}$.

3. Отношение 9-го члена геометрической прогрессии к ее 6-му члену равно $1/8$. Найдите 1-й член прогрессии, если ее 5-й член равен 3.

4. Решите неравенство $2|x - 1| \geq 2x^2 + 2,5$.

5. Решите неравенство $7^{\sqrt{x-12}} \geq 10^{6\sqrt{x-12}}$.

6. Вычислите $\log_9 36 - \log_3 (2/27)$.

7. Вычислите $\sin^2 12^\circ + \cos 48^\circ \cos 72^\circ$.

8. Найдите в градусах наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sin(25^\circ + x) - \sin(15^\circ + x) = \sin 5^\circ.$$

9. Найдите наименьшее целое значение параметра a , при котором неравенство $(x + a)^3 (x - 5) + 16875 > 0$ выполняется для всех значений x .

10. Найдите произведение корней уравнения $x^{4\log_9 x} = 3x^2$.

11. Около прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой $AB = 17$ описана окружность. Окружность радиуса 4 касается обоих катетов и описанной окружности изнутри. Найдите площадь треугольника ABC .

12. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро

образует с плоскостью основания пирамиды угол, тангенс которого равен $\sqrt{6}$. Около пирамиды описана сфера. Две другие сферы расположены так, что каждая из них проходит через середины всех сторон основания пирамиды и касается описанной сферы изнутри. Радиус большей из этих сфер равен 5. Найдите радиус меньшей из этих сфер.

Вариант 2

1. Упростите выражение и найдите его значение при $x = 1/11$, $y = 3$:

$$\left[\frac{2\sqrt[3]{3}xy}{x^2y^2 - \sqrt[3]{9}} + \frac{xy - \sqrt[3]{3}}{2xy + 2\sqrt[3]{3}} \right] \cdot \frac{2xy}{xy + \sqrt[3]{3}} - \frac{xy}{xy - \sqrt[3]{3}} + 0,1.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{0,5(x^2 - 9x + 322)} = x - 5.$$

3. Произведение 14-го и 30-го членов геометрической прогрессии равно 0,09. Найдите 22-й член этой прогрессии, если известно, что он положителен.

4. Найдите наименьшее целое положительное решение неравенства $|x - 2,5| > 8$.

5. Найдите наибольшее целое решение неравенства $\frac{(\sqrt{5})^{x+2}}{3^{x+2}} > \frac{5\sqrt{5}}{27}$.

6. Вычислите $\log_6 10 \cdot \lg(10\sqrt[10]{216})$.

7. Вычислите $\frac{2\sin^2 55^\circ - 1}{2\operatorname{ctg} 100^\circ \cos^2 170^\circ}$.

8. Найдите в градусах наименьший положительный корень уравнения

$$\cos \frac{\pi}{4} \sin 3x + \sin \frac{\pi}{4} \cos 3x = \frac{1}{2}.$$

9. Найдите наибольшее целое значение параметра a , при котором уравнение $27x^3 - 27ax^2 + 256 = 0$ имеет единственный корень.

10. Найдите меньший корень уравнения

$$\frac{x}{80} = \left(\frac{5}{4}\right)^{\log_x 100}.$$

11. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса AL . Высота CK треугольника ALC продолжена до пересечения со стороной AB в точке N . Известно, что $AN : NB = 1 : 2$. Найдите отношение $AK : KL$.

12. Около правильной треугольной пирамиды описана сфера. Две другие сферы радиусов 13 и 7 расположены так, что каждая из них проходит через середины всех сторон основания пирамиды и касается описанной сферы изнутри. Найдите радиус описанной сферы.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Внимание! Если единицы измерения не указаны, выразите ответ в единицах СИ. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Вариант 1

1. С самолета летящего на высоте 550 м со скоростью 180 км/ч, выпал груз. На какой высоте скорость груза будет направлена под углом 60° к горизонту?

2. Какова средняя сила давления на плечо при стрельбе из автомата, если масса пули 15 г, а скорость пули при вылете 400 м/с? Автомат делает 200 выстрелов в минуту.

3. Шар массой 3 кг, имевший скорость 4 м/с, испытывает абсолютно неупругий удар с покоящимся шаром такой же массы. Сколько тепла выделилось при ударе?

4. При изменении температуры газа от 286 К до 326 К давление повысилось на 40 кПа. Найдите первоначальное давление (в кПа) газа. Процесс изохорный.

5. Расстояние между обкладками плоского воздушного конденсатора, подключенного к источнику ЭДС, составляет 2,5 мм. На сколько процентов увеличится энергия электрического поля конденсатора, если обкладки конденсатора сблизить до расстояния 2 мм?

6. Медная проволока обладает электрическим сопротивлением 8 Ом. Каким электрическим сопротивлением обладает медная проволока, у которой в три раза больше длина и в два раза больше площадь поперечного сечения?

7. Какова должна быть длина (в см) математического маятника на Луне, чтобы период его колебаний был таким же, как период колебаний математического маятника длиной 66 см на Земле? Ускорение силы тяжести на Луне в 6 раз меньше, чем на Земле.

8. Предмет расположен на расстоянии $0,1$ м перед собирающей линзой, с помощью которой получено увеличенное в 5 раз мнимое изображение предмета. Определите оптическую силу линзы в диоптриях.

9. Через легкий блок перекинута длинная нить, к концам которой подвешены одинаковые грузы. От одного из грузов отделяется кусок, масса которого равна трети начальной массы груза. Найдите расстояние (в см) между грузом и отделившимся от него куском через $0,5$ с после отделения.

10. Шар массой 5 кг и радиусом 7 см удерживается на наклонной плоскости с помощью горизонтальной нити, прикрепленной одним концом к верхней точке шара, а другим – к наклонной плоскости. Найдите силу натяжения нити, если ее длина 25 см.

11. В вертикальном теплоизолированном цилиндре под поршнем находится некоторое количество гелия при температуре 300 К. Температуру быстро – так, что поршень не успевает сдвинуться с места, – повышают до 400 К. Чему станет равна абсолютная температура газа после прихода системы к равновесию? Над поршнем газа нет.

12. По П-образной рамке, расположенной вертикально и помещенной в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости рамки, начинает соскальзывать без трения перемычка массой 20 г. Длина перемычки 10 см, ее сопротивление 2 МОм, индукция поля $0,1$ Тл. Найдите установившуюся скорость падения перемычки. Сопротивлением рамки пренебречь.

Вариант 2

1. Два бруска массами 3 кг и 2 кг, связанные невесомой и нерастяжимой нитью, движутся по гладкой горизонтальной поверхности под действием силы 15 Н, приложенной к первому бруску и направленной под углом 60° к горизонту. Найдите силу натяжения нити.

2. Шарик массой $0,3$ кг свободно упал на горизонтальную площадку, имея в момент падения скорость 15 м/с. Найдите изменение импульса шарика при абсолютно упругом ударе. В ответе укажите модуль полученной величины.

3. На доску массой 1500 г, лежащую на столе, действует горизонтально направленная сила 5 Н. Груз какой наименьшей массы надо положить на доску, чтобы она оставалась в покое, если коэффициент трения между доской и столом $0,2$?

4. Газ массой $0,008$ кг, находящийся в баллоне при 27°C , создает давление 50 кПа. Найдите молярную массу газа (в

кг/кмоль), если известно, что водород (молярная масса 2 кг/кмоль) массой 2 г создает в таком же баллоне при 60 °С давление 222 кПа.

5. Два конденсатора, емкости которых 1 мкФ и 4 мкФ, соединены последовательно и подключены к источнику тока с ЭДС 120 В. Найдите разность потенциалов на конденсаторе с большей емкостью.

6. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией 10 мТл по окружности, имея импульс $12,8 \cdot 10^{-23}$ кг·м/с. Найдите радиус этой окружности (в см). Заряд электрона $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

7. Колебательный контур состоит из катушки и конденсатора. Во сколько раз увеличится период собственных колебаний в контуре, если параллельно конденсатору подключить еще 8 таких же конденсаторов?

8. На каком расстоянии (в см) от выпуклой линзы с фокусным расстоянием 32 см следует поместить предмет, чтобы получить действительное изображение, увеличенное в 4 раза?

9. На горе с углом наклона к горизонту 30° бросают горизонтально мяч с начальной скоростью 30 м/с. На каком расстоянии от точки бросания вдоль наклонной плоскости упадет мяч?

10. На горизонтальной плоскости лежат два бруска массами 3 кг и 8 кг, соединенные недеформированной пружиной. Какую наименьшую горизонтальную силу надо приложить к первому бруску, чтобы сдвинулся и второй? Коэффициенты трения брусков о плоскость равны 0,2 и 0,3 соответственно.

11. В закрытом сосуде объемом 83 л находится влажный воздух при температуре 87 °С. Вначале давление в сосуде 60 кПа, влажность 40%. Каким стало давление (в кПа) после того, как в сосуд ввели 5 г воды и уменьшили его объем в два раза? Давление насыщенного пара при 87 °С составляет 60 кПа, молярная масса воды 18 г/моль, универсальная газовая постоянная 8,3 Дж/(моль·К). Объемом воды пренебречь. Температура постоянна.

12. При токе в цепи 2 А полезная мощность батареи 10 Вт, а при токе 4 А ее полезная мощность 16 Вт. Какую наибольшую полезную мощность может дать батарея?

Публикацию подготовили Б.Писаревский, А.Черноуцан

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(физико-механический факультет)

1. Упростите выражение $\frac{a-b}{1/a+1/b} \frac{1+b/a}{1-a/b}$.

2. Найдите целое число – значение выражения

$$\frac{1}{(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt{2}+1)} - \sqrt[4]{2}.$$

3. Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 + 5x + 2 = 0$.

4. Решите уравнение $\sqrt{-x^2 + 4x - 3} = x - 1$.

5. Решите неравенство $\frac{1}{x^2 - x - 2} \leq \frac{1}{x + 1}$.

6. Найдите производную функции $y = \sin^2 x$ в точке $\pi/4$.

7. Найдите рациональное число – значение выражения

$$(\sqrt{2}+1)\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\sin\left(\frac{17\pi}{24}\right).$$

8. Решите уравнение $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} 3x = 1$.

9. Решите неравенство $\arcsin x < 2 \arccos x$.

10. Найдите область определения функции $y = \log_{1+x}(2-x)$.

11. Найдите рациональное число – значение выражения $4^{\log_{1/2} 3}$.

12. Решите уравнение $2^{x^2} = 3^x$.

13. Решите неравенство $\lg(4^x - 9) \leq \lg(2^x + 3)$.

14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9, \\ x^2 - xy + y^2 = 3. \end{cases}$$

15. Найдите сумму первых девяти элементов арифметической прогрессии, если ее пятый элемент равен 3.

16. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если отношение суммы всех ее элементов с нечетными номерами к сумме всех элементов с четными номерами равно 2.

17. Составьте уравнение касательных к параболе $y = x^2$, проходящих через точку $(1/2; 0)$.

18. Две стороны треугольника имеют длины 10 и 24. Найдите такое значение длины третьей стороны, при котором треугольник имеет наибольшую площадь.

19. В правильную треугольную пирамиду с высотой 27 вписан шар радиуса 12. Найдите расстояние от вершины пирамиды до точки касания шара с боковой гранью.

20. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $a \cdot 2^{2x} - a \cdot 2^{x+1} + 1 = 0$ имеет единственное решение.

Вариант 2

(физико-технический факультет)

1. Решите уравнение

$$\frac{x+3}{x+7} = \frac{x-2}{x-3}.$$

2. Подставьте $x = \frac{4t}{t^2 + 4}$ в выражение $\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ и упростите результат при условии, что $t > 2$.

3. Найдите производную функции $y = 2(x - \pi) \cos 2x$ в точке $x = \pi$.

4. Решите уравнение $\log_3(x - 3) + \log_3(x + 5) = 2$.

5. Найдите целое число – значение выражения $3^{2\log_2 10} 5^{-\log_2 9}$.

6. Найдите целое число – значение выражения $(2\sqrt{2} \sin(7\pi/12) - 1)^2$.

7. Решите уравнение $\sin 3x = \cos x - \sin x$.

8. Вычислите $\arccos(\sin 7)$.

9. Решите неравенство $\frac{\sqrt{x+3} - x - 1}{\sqrt{x+7} - x - 1} \leq 1$.

10. Решите неравенство $(\sqrt{4-x^2} - 1) \sin x > 0$.

11. Найдите область определения функции

$$y = \arcsin \sqrt{(x-1)(5-x)}.$$

12. Найдите множество значений функции $y = \frac{x^2 + 6x - 11}{x^2 - 1}$.

13. Найдите наименьший положительный период функции $y = \sin 3x \sin 15x$.

14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 8y + 4 = 0, \\ x^2 + 4y^2 + 8 = 8x. \end{cases}$$

15. В какой точке касательная к графику функции $y = \sqrt{x^2 - 9}$, проходящая через точку (9; 9), касается этого графика?

16. Сумма второго и шестого членов арифметической прогрессии равна 16, а их произведение равно 48. Найдите сумму первых десяти членов прогрессии.

17. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой отношение второго члена к сумме всех членов равно 4 : 25.

18. Через точку пересечения диагоналей трапеции с основаниями 6 и 12 проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между боковыми сторонами трапеции.

19. Правильная треугольная пирамида имеет объем $6\sqrt{3}$. Через сторону основания проведена плоскость, делящая противоположное боковое ребро в отношении 1:3, считая от вершины, и образующая угол 30° с плоскостью основания. Найдите площадь сечения.

20. При каких значениях a среди корней уравнения $ax^2 - 2(a+1)x + a+3 = 0$ имеется в точности один положительный?

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Два тела одновременно брошены горизонтально из одной точки над поверхностью земли в противоположных направлениях с разными скоростями. Как изменяется расстояние между телами, если пренебречь сопротивлением воздуха:

А) остается неизменным; Б) равномерно увеличивается; В) равномерно уменьшается; Г) увеличивается с ускорением; Д) уменьшается с ускорением; Е) среди приведенных ответов правильного ответа нет?

2. Материальная точка движется по окружности радиусом 16 м, причем ее скорость меняется по закону $v = 3t + 2$ (м/с). Определите ее полное ускорение через 2 с после начала движения:

А) 3 м/с²; Б) 4 м/с²; В) 5 м/с²; Г) 6 м/с²; Д) среди приведенных ответов правильного ответа нет.

3. Если пружину жесткостью 120 Н/м разрезать на три равные части, то чему будет равна жесткость каждой части пружины:

А) 40 Н/м; Б) 80 Н/м; В) 120 Н/м; Г) 240 Н/м; Д) 360 Н/м; Д) среди приведенных ответов правильного ответа нет?

4. Замкнутая система, в которой действуют консервативные силы и силы трения, перешла из состояния с кинетической энергией 100 Дж и потенциальной энергией 100 Дж в состояние с кинетической энергией 150 Дж и потенциальной энергией 20 Дж. Определите работу силы трения при этом переходе:

А) 30 Дж.; Б) 50 Дж; В) 80 Дж; Г) -30 Дж; Д) среди приведенных ответов правильного ответа нет.

5. Какова масса воды, вытесняемая подводной частью груженого судна:

А) равна массе судна без груза; Б) равна массе судна с грузом; В) больше массы судна с грузом; Г) меньше массы судна без груза; Д) среди приведенных ответов правильного ответа нет?

6. Определите число молекул, которые содержатся в двух граммах молекулярного водорода (N_A – число Авогадро):

А) $4N_A$; Б) $2N_A$; В) N_A ; Г) $N_A/2$; Д) $N_A/4$.

7. В запаянном сосуде находится воздух при температуре 100 °С и давлении 2 атм. Относительная влажность воздуха 50%. Сосуд охладили до 0 °С. Чему стало равно давление в сосуде:

А) 0; Б) 0,50 атм; В) 1,10 атм; Г) 1,46 атм; Д) 2,05 атм?

8. В данной точке электрического поля на отрицательный точечный заряд действует сила, направленная на север; вектор скорости заряда направлен на восток. Как направлен вектор напряженности электрического поля:

А) на юг; Б) на север; В) на восток; Г) на запад; Д) на юго-восток?

9. Каким образом осуществляется передача электрической энергии из первичной обмотки трансформатора во вторичную обмотку:

А) через конденсатор, связывающий обмотки; Б) через про-

вода, соединяющие обмотки трансформатора; В) с помощью переменного электрического поля, проходящего через обе катушки; Г) с помощью электромагнитных волн; Д) с помощью переменного магнитного поля, проходящего через обе катушки?

10. Электромагнитная волна, созданная лазером, распространяется в воздухе в виде луча. Как направлены друг относительно друга векторы скорости волны \vec{v} и напряженности электрического поля волны \vec{E} :

А) эти векторы направлены одинаково ($\vec{v} \uparrow \vec{E}$); Б) направления этих векторов противоположны ($\vec{v} \updownarrow \vec{E}$); В) вектор \vec{E} волны может быть направлен как угодно, но обязательно должен быть параллелен вектору индукции магнитного поля волны \vec{B} ; Г) вектор \vec{E} волны может быть направлен как угодно, но обязательно должен быть перпендикулярен вектору индукции магнитного поля волны \vec{B} ; Д) вектор \vec{E} волны перпендикулярен вектору \vec{v} ; Е) среди приведенных ответов правильного ответа нет?

11. Рассчитайте длину взлетной полосы, если скорость самолета при взлете 300 км/ч, а время равноускоренного разгона 40 с.

12. К концам невесомого рычага подвешены грузы массами 4 кг и 24 кг. Расстояние от точки опоры до меньшего груза 60 см. Определите длину рычага, если рычаг находится в равновесии.

13. На деревянную наклонную плоскость помещается брусок из дерева. Угол наклона плоскости постепенно увеличивается от $\alpha_0 = 0^\circ$ до $\alpha = 30^\circ$, при котором брусок начинает скользить по плоскости вниз. Определите коэффициент трения бруска о плоскость.

14. Шарик, двигавшийся со скоростью v , после удара о такой же, но неподвижный шар продолжил свое движение со скоростью $v/2$ в направлении, составляющим угол 60° с первоначальным направлением движения. Какую скорость приобрел второй шар?

15. В цилиндре под поршнем находится воздух массой 3 кг. Температура воздуха увеличивается на 100°C при постоянном давлении. Найдите работу, совершенную газом при расширении. Молярная масса воздуха $M =$ _____
 $= 29 \text{ г/моль}$.

16. Определите емкость конденсатора с площадью пластин S и расстоянием d между ними, если в нем находится диэлектрическая пластина пло-

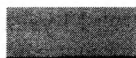


Рис. 1

щадью $S/2$ и толщиной $d/2$ с диэлектрической проницаемостью ϵ (рис.1).

17. На электрической лампочке написано: $P = 40$ Вт, $U = 220$ В. Найдите плотность тока в волоске лампочки при ее нормальном горении, если диаметр волоска $d = 0,01$ мм.

18. Батарейка для карманного фонарика имеет ЭДС 4,5 В и внутреннее сопротивление 3,5 Ом. Сколько батареек надо соединить последовательно, чтобы питать лампу, рассчитанную на напряжение 220 В и мощность 75 Вт?

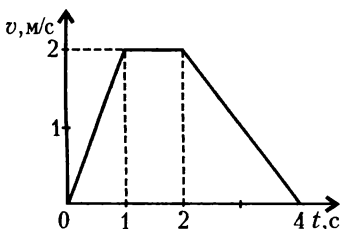
19. Материальная точка, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити, начинает движение из положения равновесия со скоростью 5 м/с, направленной горизонтально. В процессе колебательного движения угол отклонения нити достигает значения $\pi/6$. Определите период колебаний.

20. Гвоздь длиной 4 см поставлен перед собирающей линзой на расстоянии 30 см от нее перпендикулярно оптической оси. Найдите длину изображения гвоздя, если оптическая сила линзы 5 дптр.

Вариант 2

1. На рисунке 2 приведен график зависимости скорости тела от времени. Какова средняя скорость тела:

- А) 1 м/с; Б) 1,25 м/с; В) 1,6 м/с; Г) 2 м/с; Д) 3 м/с; Е) среди приведенных ответов нет правильного?



2. Из лодки, плавающей в пруду, бросают за борт спасательный круг. Как изменяется при этом архимедова сила, действующая на лодку:

- А) уменьшается; Б) не изменяется; В) увеличивается; Г) ответ зависит от расстояния между лодкой и кругом; Д) архимедова сила на плавающую лодку не действует?

3. Объем идеального газа изменяют изотермически так, что давление газа увеличивается в 3 раза. На сколько при этом изменяется объем, занимаемый газом, если начальный объем газа 6 л:

- А) увеличивается на 4 л; Б) уменьшается на 4 л; В) уменьшается на 2 л; Г) увеличивается на 2 л; Д) среди приведенных ответов нет правильного?

4. Парциальное давление водяного пара в воздухе при 11°C

равно 0,4 кПа, давление насыщенных паров при этой температуре 10 мм рт. ст. Относительная влажность воздуха равна:

А) 3%; Б) 10%; В) 20%; Г) 30%; Д) 40%.

5. Работа, совершенная тепловой машиной за один цикл, в 3 раза меньше, чем количество теплоты, переданное в том же цикле холодильнику. КПД тепловой машины равен:

А) $1/4$; Б) $1/3$; В) $2/3$; Г) $3/4$; Д) $5/6$.

6. Два маленьких металлических шарика, первый с зарядом $-q$ и радиусом R и второй с зарядом $+2q$ и радиусом $2R$, находятся на некотором расстоянии r друг от друга ($r \gg R$). Шарики соединили проволокой, а затем проволоку убрали. Как изменилась (по модулю) сила взаимодействия между ними:

А) увеличилась в 2 раза; Б) уменьшилась в 2 раза; В) увеличилась в 4 раза; Г) уменьшилась в 4 раза; Д) увеличилась в 9 раз; Е) уменьшилась в 9 раз; Ж) не изменилась?

7. Какая сила тока в контуре индуктивностью 5 мГн создает магнитный поток $2 \cdot 10^{-2}$ Вб:

А) 4 мА; Б) 4 А; В) 250 А; Г) 250 мА; Д) 0,1 А?

8. В колебательном контуре, состоящем из катушки индуктивности и плоского конденсатора, площадь пластин конденсатора и расстояние между ними уменьшили в 2 раза. Период свободных электромагнитных колебаний в контуре при этом:

А) увеличился в 2 раза; Б) уменьшился в 2 раза; В) увеличился в $\sqrt{2}$ раз; Г) уменьшился в $\sqrt{2}$ раз; Д) не изменился; Е) среди приведенных ответов нет правильного.

9. Чему равно число штрихов дифракционной решетки на 1 мм ее длины, если при освещении ее светом с длиной волны 625 нм максимум четвертого порядка виден под углом 30° :

А) 8000; Б) 2000; В) 800; Г) 200; Д) 5; Е) среди приведенных ответов нет правильного?

10. В результате каких радиоактивных распадов натрия $^{22}_{11}\text{Na}$ превращается в магний $^{22}_{12}\text{Mg}$:

А) двух β -распадов; Б) одного β -распада; В) двух α -распадов; Г) одного α -распада; Д) такого распада не существует?

11. Пассажир поднимается по неподвижному эскалатору метрополитена за 3 мин, а по движущемуся вверх эскалатору за 2 мин. Сколько времени он будет подниматься по эскалатору, движущемуся вниз? Во всех случаях скорость пассажира относительно эскалатора одинакова.

12. На поверхности неизвестной планеты ускорение свободного падения равно g_0 . Найдите плотность вещества планеты, считая ее шаром радиусом R .

13. С какой скоростью двигался поезд массой 1500 т, если под действием тормозящей силы 150 кН он прошел до остановки путь 500 м?

14. Рабочий удерживает за один конец доску массой 40 кг, прикладывая силу перпендикулярно к доске. Доска образует угол 30° с землей. Найдите величину этой силы.

15. Сколько молей идеального одноатомного газа находится в сосуде, если при температуре 27°C внутренняя энергия этого газа равна 15 кДж?

16. Два маленьких шарика с массами m и $2m$ и зарядами q и $-2q$ соответственно удерживаются на расстоянии L . Шарики отпускают. Найдите скорости шариков в момент, когда расстояние между ними уменьшится в 2 раза.

17. Батарея с внутренним сопротивлением 3,6 Ом из последовательно соединенных элементов, каждый из которых имеет ЭДС 1,2 В, дает максимальную силу тока 3 А. Найдите число элементов в батарее и количество теплоты, которое выделится за 1 мин на внешнем сопротивлении, равном внутреннему сопротивлению батареи.

18. Прямой проводник длиной 0,2 м и массой 5 г подвешен горизонтально на двух невесомых нитях в однородном магнитном поле. Магнитная индукция равна 50 мТл и направлена перпендикулярно к проводнику и нитям подвеса. Какой ток необходимо пропустить через проводник, чтобы одна из нитей разорвалась, если нить разрывается при нагрузке, равной или превышающей 40 мН?

19. Линза дает действительное изображение предмета, увеличивая его в 3 раза. Как изменится увеличение, если вдвое уменьшить оптическую силу линзы? Расстояние между предметом и линзой остается неизменным. Каким станет изображение?

20. При поочередном освещении металла светом с длиной волны 0,35 мкм и 0,5 мкм обнаружено, что соответствующие максимальные скорости выбитых с поверхности электронов отличаются в два раза. Найдите работу выхода электронов из этого металла. Принять, что постоянная Планка равна $6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

*Публикацию подготовили Т.Андреева, А.Басов,
А.Васильев, А.Моисеев, С.Преображенский*

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(математико-механический факультет)

1. Два бегуна стартовали с интервалом 5 минут. Второй бегун догнал первого в d километрах от точки старта. Пробежав еще 3 километра, второй бегун постоял 2 минуты, а затем побежал обратно и спустя 4 минуты встретил первого. Сколько минут прошло с момента старта второго бегуна до этой встречи? Учитывая, что забег продолжался менее 45 минут и что скорости бегунов постоянны и не превышают 20 км/ч, укажите, при каких значениях d задача имеет решение.

2. Решите неравенство

$$|x + 3| \geq 2 + \sqrt{3x^2 - 3}.$$

3. Решите неравенство

$$2 \log_{x^2} (1 + 27x^3) \leq \log_{x^2} (1 + 6x + 9x^2).$$

4. Точка M лежит на ребре BD пирамиды $ABCD$, расположенной в пространстве $Oxyz$. Вершины A , B , C и D имеют координаты $(-5, 0, 0)$, $(0, 14, 0)$, $(4, 0, 0)$ и $(0, -1, 15)$ соответственно. Площадь треугольника MAC равна 45. Найдите отношение $BM : DM$.

5. Решите уравнение $\arctg(1-x) + \arctg \frac{x(2-x)}{5} = \frac{\pi}{4}$.

Вариант 2

(Высшая школа менеджмента)

1. Решите неравенство

$$3 + \log_2 15 + \log_2 x + \log_2 (4-x) > \log_2 (120 - 121x).$$

2. Два насоса начали одновременно заполнять два разных бака, причем объем второго бака в полтора раза больше объема первого. Первый насос заполнил свой бак через 5 часов после того, как второй заполнил половину своего бака. При этом второй насос заполняет свой бак на 2 часа дольше, чем первый заполняет половину своего. За какое время каждый из насосов заполняет свой бак? Какой из насосов мощнее и во сколько раз?

3. Решите неравенство

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{3x} > \sqrt{5-x} + \sqrt{x+3}.$$

4. Решите уравнение

$$\cos x (2 - \sin^2 x) = (2 + \sin 3x) \sqrt{1 + \sin 3x}.$$

5. На плоскости построены две окружности так, что каждая из них проходит через центр другой, P и Q – точки их пересечения. Через точку P проходит прямая, пересекающая первую окружность в точке A , а вторую – в точке B , причем P находится между A и B . Через точку Q проведена прямая, параллельная AB , пересекающая первую окружность в точке D , а вторую – в точке C . Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если известно, что $AP = 2$, $PB = 1$.

*Публикацию подготовили
А.Громов, А.Осипов, Ю.Чурик*

Государственный университет – Высшая школа экономики

МАТЕМАТИКА

Олимпиада

I тур

1. 13. 2. 12. 3. 6. 4. 211. 5. 7. 6. 504. 7. 89. 8. 5. 9. 2. 10. 11. 11. 5.
12. 52. 13. 3. 14. 10. 15. 2. 16. 5. 17. 18. 18. 167. 19. 3. 20. 34.

II тур

1. Не обязательно. Возьмем пять отрезков длины 1 и один отрезок длины $\sqrt{3} < a < 2$. Очевидно, что из любых трех из этих отрезков можно сложить треугольник. Предположим, что из данных отрезков можно сложить тетраэдр. Пусть AB – его ребро длины a . Две грани, не содержащие ребра AB , – правильные треугольники со стороной 1. Если M – середина общего ребра этих граней, то $AM = BM = \frac{\sqrt{3}}{2}$, но $AM + BM = \sqrt{3} < a$, что невозможно.

2. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Пусть α – левая часть уравнения, $\beta = \arcsin t$. Тогда $\sin \alpha = 2t\sqrt{1-t^2}$, $\sin 2\beta = 2\sin \beta \cos \beta = 2t\sqrt{1-t^2}$. Итак, $\sin \alpha = \sin 2\beta$ при любых допустимых t . Однако левая часть принимает значения в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому должны выполняться неравенства $-\frac{\pi}{2} \leq 2\beta \leq \frac{\pi}{2}$, т.е. $-\frac{\pi}{4} \leq \beta \leq \frac{\pi}{4}$.

3. $\frac{\pi}{12}$. Поскольку прямая BC пересекает не сам отрезок OA , а его продолжение за точку A , один из углов B, C – тупой (рис.1), а так как угол A вдвое больше угла C , тупым является угол B .

Теперь будем выражать все углы на нашем рисунке через угол C . Во-первых, $\angle A = 2\angle C$, $\angle B = \pi - 3\angle C$,

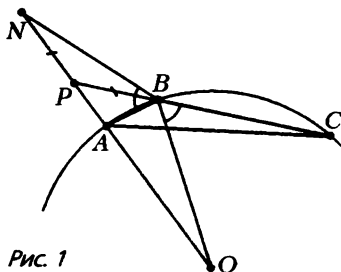


Рис. 1

откуда $\angle COA = 6\angle C$ и $\angle CAO = \frac{\pi}{2} - 3\angle C$. Далее, $\angle ABP = \angle A + \angle C = 3\angle C$, $\angle BAP = \pi - \angle A - \angle OAC = \frac{\pi}{2} + \angle C$ и $\angle APB = \pi - \angle ABP - \angle BAP = \frac{\pi}{2} - 4\angle C$.

Теперь выразим этот же угол APB через $\angle C$, используя точку N . Ясно, что $\angle ABN = \angle OBC = \frac{\pi - \angle BOC}{2} = \frac{\pi}{2} - \angle A = \frac{\pi}{2} - 2\angle C$, откуда $\angle ANB = \pi - \angle ABN - \angle BAP = \angle C$. Но $BP = PN$, т.е. $\angle PBN = \angle PNB$. Рассмотрим теперь два случая.

1) Точка P лежит между точками A и N . Тогда $\angle APB = \angle PNB + \angle PBN = 2\angle ANB = 2\angle C$, т.е. $\frac{\pi}{2} - 4\angle C = 2\angle C$, откуда $\angle C = \frac{\pi}{12}$.

2) Точка N лежит между точками A и P . Тогда $\angle APB = \pi - 2(\pi - \angle C) = 2\angle C - \pi$, что невозможно, так как $\angle C < \frac{\pi}{2}$.

4. а) Может. Достаточно взять функцию, график которой на каждом из отрезков $[0; 2]$, $[2; 4]$, ..., $[48; 50]$ – «зубец», состоящий из двух отрезков – боковых сторон равнобедренного треугольника с высотой 50 (рис.2). Область значений этой функции – отрезок $[0; 50]$ – совпадает с ее областью определения. График функции $f(f(x))$ на каждом из отрезков $[n; n+1]$ состоит из 50 «зубцов». Следовательно, общее количество «зубцов» на отрезке $[0; 50]$ равно $50 \times 50 = 2500$.

Рис. 2

б) Может. Для построения примера достаточно вспомнить, что график обратной функции получается из графика исходной функции симметрией относительно прямой $y = x$. Если график самой функции $y = f(x)$ симметричен относительно прямой $y = x$, то $f(f(x)) = x$.

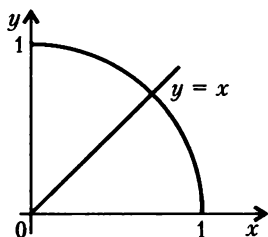


Рис. 3

Рассмотрим четверть окружности единичного радиуса с центром в начале координат (рис.3). Разделим ее на 50 равных дуг и построим ломаную, последовательно соединяющую точки деления (четверть контура правильного 200-угольника, вписанного в единичную окружность).

Полученная ломаная симметрична относительно прямой $y = x$, является графиком убывающей функции и сама себе обратна.

Поэтому график функции $y = f(f(x))$ – отрезок прямой $y = x$ при $0 \leq x \leq 1$.

5. 9. Предположим, что на плоскости имеется n точек, удовлетворяющих условию задачи. Рассмотрим какую-нибудь окружность, внутри которой они все содержатся. Уменьшим окружность (возможно, смещая центр) так, чтобы снаружи по-прежнему точек не было, а на границе было не менее трех точек – скажем (A , B , C). Проверьте самостоятельно, что такая окружность действительно найдется. Без ограничения общности можно считать, что точка A_1 , диаметрально противоположная точке A , лежит между B и C . Рассмотрим углы ABA_1 и ACA_1 (рис.4). Эти углы опираются на диаметр, а значит, прямые. Внутри каждого из них – не более 5 наших точек. А вместе они покрывают все точки. Значит, $n \leq 9$.

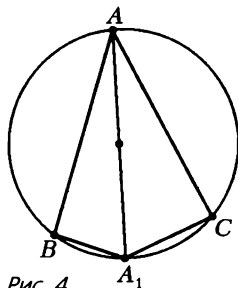


Рис. 4

Примером 9 точек, удовлетворяющих условию задачи, являются вершины правильного девятиугольника.

6. Решим задачу для произвольного числа баз. Обозначим число способов соединить n баз при помощи четного числа узлов связи через a_n , а число способов соединить n баз при помощи нечетного числа узлов связи – через b_n ; будем такие способы соединения называть, соответственно, четными и нечетными. Нас интересует разность $a_n - b_n$, которую мы обозначим через c_n .

Для начала вычислим значения c_n для первых нескольких значений n , просто нарисовав все соответствующие способы соединения. Получается $c_3 = 0 - 1 = -1$, $c_4 = 3 - 1 = 2$ (рис.5). Сделав аналогичные рисун-

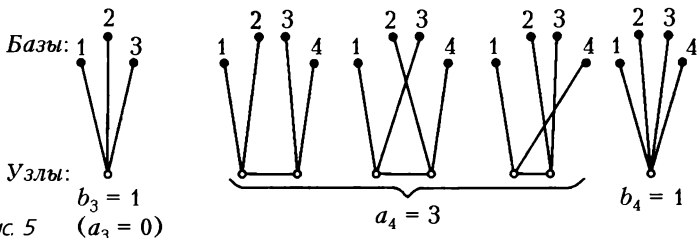


Рис. 5 ($a_3 = 0$)

ки и вычисления для $c_5 = 10 - 1 - 15 = -6$ и $c_6 = 105 + 10 + 15 - 45 - 60 - 1 = 24$, уже можно угадать ответ: $c_n = (-1)^n (n - 2)!$.

Конечно, такого рода формулы проще всего доказывать по индукции. Для того чтобы понять, как будет выглядеть индукционный шаг, попробуем сначала разобраться, как получить всевозможные способы соединения $n + 1$ баз, зная все возможные способы соединения n баз.

Представим себе, что у нас уже имеется схема соединения $n + 1$ баз. Рассмотрим узел связи, с которым соединена последняя, $(n + 1)$ -я база. Если в этом узле сходятся по крайней мере четыре телефонные линии, то понятно, что такой способ соединения получен из схемы соединения n баз простым подсоединением к уже существовавшему узлу новой, $(n + 1)$ -й базы. Если же в этом узле сходятся только три линии, то мысленно сотрем ту из них, которая ведет к $(n + 1)$ -й базе (и саму эту базу сотрем), а две другие линии будем считать одной (убрав их общий узел и «склеив» линии в этом месте) – эта линия будет тогда соединять два узла или узел и «старую» базу, и мы получим удовлетворяющий условию способ соединения для n баз.

Таким образом, мы видим, что любую схему соединения $n + 1$ базы можно получить из схемы соединения n баз применением одной из двух операций: мы либо присоединяем $(n + 1)$ -ю базу одной линией к уже существующему телефонному узлу, либо на одной из уже существующих линий создаем новый узел, превращая эту линию в две новые, и еще отводим от этого узла одну линию к $(n + 1)$ -й базе. При первом способе число телефонных узлов не меняется, а при втором оно увеличивается на единицу (и тем самым меняется его четность!). Предположим, что первоначальная схема подключения n баз имела B узлов, это значит, что у нас имеется ровно B разных способов подключить $(n + 1)$ -ю базу с сохранением числа узлов (а, значит, и его четности!). При втором способе присоединения $(n + 1)$ -й базы нам нужно выбрать одну из имеющихся телефонных линий; нетрудно посчитать, что таких линий имеется ровно $B + n - 1$, следовательно, у нас имеется ровно $B + n - 1$ способ присоединения новой базы, приводящий к изменению четности числа узлов (и все эти способы разные).

Сравнивая найденные количества способов, мы видим, что число способов подключения с изменением четности числа узлов больше числа способов с сохранением четности ровно на $(B + n - 1) - B = n - 1$, причем это число не зависит от B . Очевидно, что, перебирая все возможные способы соединения старых n баз и все возможные способы присоединения $(n + 1)$ -й базы, мы получим все возможные способы соединения $n + 1$ баз, причем каждый способ получится ровно один раз. Следовательно, $c_{n+1} = (-1)(n - 1)c_n$, откуда нетрудно получить угаданную нами формулу.

В частности, $c_{10} = 8! = 40320$.

Устный экзамен

1. $\sqrt{3} - 1$. *Указание.* Задача сводится к отысканию минимального расстояния от начала координат O до точки P на параболе

$$y = \frac{x^2 - 4}{2},$$

т.е. нахождению минимума функции

$$f(x) = x^2 + \frac{(x^2 - 4)^2}{4} = \frac{(x^2 - 2)^2 + 12}{4}.$$

2. $n = 2010$ (наименьшее $n \geq 2008$, кратное трем). Заметим, что если решение (x_1, \dots, x_n) существует, то все числа x_i отличны от нуля и от единицы, что мы и будем далее предполагать.

Перепишем первое уравнение в виде $-1 = x_1(x_2 - 1)$ и подставим в него выражение для $x_2 - 1$, доставляемое вторым уравнением. Получим соотношение

$$x_1 x_2 x_3 = -1. \quad (1)$$

Аналогично, из второго и третьего уравнений следует соотношение

$$x_2 x_3 x_4 = -1, \quad (2)$$

и вообще, для всех $k = 1, 2, \dots, n$ мы выведем из k -го и $(k + 1)$ -го уравнений, что

$$x_k x_{k+1} x_{k+2} = -1, \quad (3)$$

где при $k = n - 1$ надо положить $k + 1 = n$, $k + 2 = 1$, а при $k = n$ взять $k + 1 = 1$, $k + 2 = 2$. Сравнивая уравнения (1) и (2), мы видим, что $x_1 = x_4$. Аналогично, для каждого двух последовательных значений k из уравнения (3) вытекает равенство $x_k = x_{k+3}$, которое при $k = (n - 2)$, $(n - 1)$, n выглядит, соответственно, как $x_{n-2} = x_1$, $x_{n-1} = x_2$ и $x_n = x_3$.

Таким образом, если n не делится на 3, то все неизвестные равны между собой и система сводится к одному уравнению $x_1 - 1 = x_1^2$, которое не имеет корней. Если же n делится на 3, то каждое неизвестное x_k будет равно x_1 , x_2 или x_3 в зависимости от остатка, который имеет k от деления на 3 (x_1 и x_2 получатся, когда этот остаток равен 1 и 2 соответственно), а исходная система сведется к системе

$$\begin{cases} x_1 - 1 = x_1 x_2, \\ x_2 - 1 = x_2 x_3, \\ x_3 - 1 = x_3 x_1, \end{cases}$$

решение которой легко подобрать: например, беря $x_1 = 2$, из первого уравнения, находим $x_2 = 1/2$, из (1) получаем $x_3 = -1$ и, подставляя в систему, убеждаемся, что это решение. Итак, система решается в точности при n кратных трем.

3. Нет, такого многогранника не существует. *Указание.* Если бы такой многогранник существовал, то точки X, Y, Z и T (рис.6) лежали бы на одной прямой.

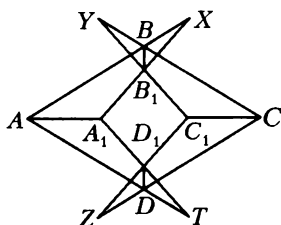


Рис. 6

4. $m = 89$. Обозначим 26-значное число из условия задачи через $N = m^{13}$. Заметим, что $m < 100$, так как 100^{13} является 27-значным числом. Поскольку

$$80^{13} = 8^{13} \cdot 10^{13} = (2^{13})^3 \cdot 10^{13} = 8192^3 \cdot 10^{13} < (10^4)^3 \cdot 10^{13} = 10^{25},$$

число 80^{13} не более чем 25-значно, а значит, $m > 80$.

Найдем последнюю цифру числа m . Так как N нечетно, m также нечетно, так что последняя цифра у m нечетна. Она не равна ни 1, ни 5, так как любая степень числа, кончающегося на 1 или на 5, кончается, соответственно, также на 1 или 5. Если m оканчивается на 3 или на 7, то m^2 оканчивается на 9, а $m^4 = (m^2)^2$ — на 1. Поэтому $m^{12} = (m^4)^3$ оканчивается на 1, а $N = m^{12} \cdot m$ — на ту же цифру (3 или 7), что и m ; но это не так.

Таким образом, m оканчивается на 9 и может равняться только 89 или 99. Если $m = 99$, то $N = 99^{13}$ должно делиться на 9, что неверно, так как сумма цифр числа N не делится на 9. Остается единственная возможность: $m = 89$.

5. Нет, такого четырехугольника не существует.

Допустим, что четырехугольник $ABCD$ с $AB = 7$, $BC = 4$, $CD = 2$, $DA = 3$ и площадью 13 существует. Симметрично отразив треугольник CDA относительно срединного перпендикуляра к диагонали AC (рис. 7), мы получим новый четырехугольник $EBFD$ той же площади со сторонами $EB = AB = 7$, $BF = BC = 4$, $FD = AD = 3$, $DE = DC = 2$.

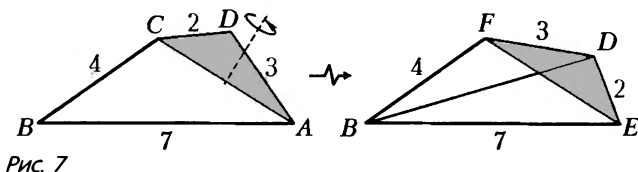


Рис. 7

Если четырехугольник $EBFD$ выпуклый (как на рисунке 7), его площадь равна сумме площадей треугольников DEB и DFB , причем

$$S_{DEB} = \frac{1}{2} DE \cdot EB \cdot \sin \angle DEB \leq \frac{DE \cdot EB}{2} = 7,$$

$$S_{DFB} = \frac{1}{2} DF \cdot FB \cdot \sin \angle DFB \leq \frac{DF \cdot FB}{2} = 6,$$

и равенства равносильны тому, что треугольники — прямоугольные. Поскольку в нашем случае должны выполняться равенства, диагональ BD является общей гипотенузой прямоугольных треугольников DEB и DFB , что противоречит теореме Пифагора: из первого треугольника $BD^2 = 53$, тогда как из второго $BD^2 = 25$. Невыпуклым четырехуголь-

ник $EBFD$ также быть не может, поскольку в этом случае он бы целиком лежал внутри какого-нибудь одного из треугольников DEB , DFB , и его площадь подавно была бы меньше 13.

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. Через 10 часов. 2. $(-\infty; -1] \cup (0; 1] \cup (2; 3]$. 3. $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
4. $(-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. 5. $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{11}$. 6. $x \geq \frac{5}{3}$ при $a = 5$;
 $x = \frac{3a-5}{6}$ при $a < 5$; нет корней при $a > 5$.

Вариант 2

1. $\left[-\frac{1}{4}; 4\right] \cup \{-1\}$. 2. $\frac{5+\sqrt{37}}{2}$. 3. 1. 4. $\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{5}} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
5. $\sqrt{5} - 1$. 6. 42 с и 30 с.

Вариант 3

1. Первое число меньше второго. 2. $(1; \sqrt{2}) \cup (2; +\infty)$.
3. 89362 числа. *Указание.* Сначала подсчитайте количество чисел, не содержащих ни одного нуля в десятичной записи, пользуясь тем, что количество таких n -значных чисел равно 9^n .

4. $\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{2}\right) + \pi n$, $-\frac{\pi}{4} + (-1)^m \arcsin \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \pi m$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Указание. Приведите уравнение к виду

$$2(\operatorname{tg} x - \sin x + 1) + 3(\operatorname{ctg} x - \cos x + 1) = 0,$$

или

$$\left(\frac{2}{\cos x} + \frac{3}{\sin x}\right)(\sin x - \sin x \cos x + \cos x) = 0.$$

5. $\frac{S_{CKD}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{6}$. *Указание.* Пусть $BC = a$, тогда $AN = a$, $ND = 2a$,

$$S_{CND} = \frac{1}{2} S_{ABCD}; S_{CKD} = \frac{CK}{CN} \cdot S_{CND} = \frac{1}{6} S_{ABCD}, \text{ так как } \frac{CK}{CN} = \frac{1}{3}.$$

6. 20 и 15 кругов. *Указание.* Пусть u и v — скорости первого и второго спортсменов соответственно, измеряемые в частях круга за единицу времени, t — время, в течение которого спортсмены бежали в одном направлении. Тогда $t(u - v) = 4$. К этому моменту первый и второй спортсмены пробежали $\frac{4u}{u-v}$ и $\frac{4v}{u-v}$ кругов соответственно. Полный

путь, пройденный первым спортсменом, равен $\frac{4u}{u-v} + \frac{7u}{u+v} = m$, вторым $n = \frac{4v}{u-v} + \frac{7v}{u+v}$. Так как вместе они прошли 35 кругов, то $m + n = 35$, откуда $\frac{4(u+v)}{u-v} = 28$, или $v = \frac{3}{4}u$. Отсюда $m = 20$, $n = 15$.

7. Миша неправ, поскольку число звеньев ломаной, по которой движется шарик от точки входа до точки выхода, заведомо четно, а число ударов на 1 меньше числа звеньев.

ФИЗИКА

Вариант 1

$$1. a = \frac{6s}{5t_1^2} = 12 \text{ м/с}^2.$$

$$2. h = \frac{L + (p_0/(\rho g)) - \sqrt{L^2 + (p_0/(\rho g))^2}}{2} = \frac{L + p_0 (\text{мм рт.ст.}) - \sqrt{L^2 + (p_0 (\text{мм рт.ст.}))^2}}{2} = 250 \text{ мм}.$$

$$3. F = 2 \frac{kq_1 q_3}{l^2} \cos 30^\circ \approx 1,39 \cdot 10^{-4} \text{ Н}.$$

$$4. U_4 = IR_4 = 20 \text{ В}, \text{ где } I = \frac{U}{R} = 10 \text{ А} - \text{полный ток в цепи,}$$

$$R = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} + R_4 = 3,6 \text{ Ом} - \text{полное сопротивление цепи.}$$

$$5. F = \frac{l_1 l_2}{l_2 - l_1} = -0,2 \text{ м}.$$

Вариант 2

$$1. A_c = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -4987,5 \text{ Дж}. \quad 2. k_2 = \frac{\rho_1 k_1 - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} = \frac{4}{21}.$$

$$3. E = \frac{q}{Cd} = 2 \cdot 10^3 \text{ В/м}.$$

$$4. m_3 = \frac{c(m_1(t_1 - t_3) - m_2(t_3 - t_2))}{\lambda} = 0,175 \text{ кг}.$$

$$5. L = \frac{2W(r + R_1)^2(2r + R_1)^2}{\epsilon^2(3r^2 + 2rR_1)} = 2 \text{ Гн}.$$

Вариант 3

$$1. r_1 = r - l \sin \alpha = 5 \text{ см}; \quad \omega = \sqrt{\frac{g \tan \alpha}{r - l \sin \alpha}} \approx 10,6 \text{ с}^{-1}.$$

$$2. a = \frac{g}{2} (\sin \beta - \sin \alpha - \mu \cos \beta - \mu \cos \alpha) \approx 0,24 \text{ м/с}^2.$$

$$3. \text{Температура увеличится на } \Delta T = \frac{3}{25} T_1.$$

$$4. A = -A_{эл} = -kq(q_2 - q_1) \left(\frac{1}{\sqrt{d^2 + l^2}} - \frac{1}{d} \right) = 0,36 \text{ мДж}.$$

$$5. U_{10} = \frac{U_1 U_3}{U_1 + U_2} = 7,2 \text{ В}, \quad U_{20} = \frac{U_2 U_3}{U_1 + U_2} = 4,8 \text{ В}.$$

$$6. L = \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}} \approx 5,7 \text{ м}. \quad 7. p = \frac{(m_1/M_1 + m_2/M_2) RT}{V} \approx 0,4 \text{ МПа}.$$

МАТИ–Российский государственный технологический университет им. К.Э.Циолковского

МАТЕМАТИКА

Первый тур

1. 4.

2. $\pi(2n+1) - \arcsin \frac{3}{5}$. *Указание.* Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 5 \cos 2x + 11 \sin x - 8 = 0, \\ 7 \cos 2x + \sin 2x - 1 = 0. \end{cases}$$

3. $a = 4$, $a = -4$, $a = \frac{13}{3}$.

4. 144. *Указание.* Последовательность зверей должна быть такой: тигр, лев, тигр, лев, тигр. Количество расположений тигров равно $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, львов $3 \cdot 2 = 6$. Общее число способов равно $24 \cdot 6 = 144$.

5. 61. Найдем, сколько человек владеют только английским языком: $10 - 5 - 3 + 2 = 4$; только французским: $7 - 3 - 4 + 2 = 2$; только немецким: $10 - 5 - 4 + 2 = 3$. Следовательно, каждый из 4 человек, знающих только английский язык, не может объясниться с людьми, не знающими английского, которых $2 + 4 + 3 = 9$, т.е. получаем $4 \cdot 9 = 36$ пар. Три человека, знающих английский и французский языки, не могут объясниться с теми тремя, кто знает только немецкий, – 9 пар. Пять человек, знающих английский и немецкий языки, не могут объясниться с двумя, знающими только французский, – 10 пар. Наконец, среди участников, не знающих английского языка, не могут объясниться двое, знающие только французский, и трое, знающие только немецкий, – 6 пар; итого 61 пара.

6. 24 см. *Указание.* Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC , лежит на первой окружности.

Второй тур

1. Делится. 2. $(x^2 + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)$.

3. Пронумеруем все кошельки целыми числами от -4 до 4 . Из каждого кошелька с положительным номером положим на левую чашу

весов количество монет, равное номеру кошелька, а из каждого кошелька с отрицательным номером положим количество монет, равное модулю номера, – на правую. Из кошелька с номером 0 монеты не кладем. Отметим, что при этом на обеих чашах лежит одинаковое количество монет, а если кошельки с номерами n и $-n$ содержат правильные монеты, то они уравнивают друг друга. Если после этого весы остались в равновесии, то все положенные монеты – правильные, так что фальшивые монеты лежат в кошельке с номером 0. Если левая чаша перевесила на n граммов, то фальшивые монеты лежат в кошельке с номером $-n$, а если на n граммов перевесила правая чаша, то фальшивые монеты лежат в кошельке с номером n .

4. $18(\sqrt{3} - 1) < AC < 36(\sqrt{2} - 1)$. Указание. Пусть $AC = 2x$, O – ортоцентр треугольника ABC . Тогда $AB = BC = 18 - x$, а высоты равны $BD = 6\sqrt{9 - x}$ и $CK = \frac{12x\sqrt{9 - x}}{18 - x}$. Далее находим $AK = \frac{2x^2}{18 - x}$. Так как $\frac{AK}{OD} = \frac{CK}{CD}$, то $OD = \frac{x^2}{6\sqrt{9 - x}}$. По условию $OD > \frac{1}{2}BD$. Следовательно, $\frac{x^2}{\sqrt{9 - x}} > 6\sqrt{9 - x}$, откуда $AC = 2x > 18(\sqrt{3} - 1)$. Так как треугольник ABC – остроугольный, $AB^2 + BC^2 > AC^2$, т.е. $2(18 - x)^2 > 4x^2$, откуда $AC = 2x < 36(\sqrt{2} - 1)$.

5. $4013\pi < |a| < 4017\pi$. Указание. Уравнение $\sin f(x) = 1$ равносильно уравнению $f(x) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Поскольку $0 \leq \sqrt{x(a - x)} \leq \frac{|a|}{2}$, ровно 2008 решений необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства $\frac{\pi}{2} + 2003 \cdot 2\pi < \frac{|a|}{2}$, $\frac{\pi}{2} + 2004 \cdot 2\pi > \frac{|a|}{2}$.

6. $\frac{5}{6}$. Исследуем вначале поведение функции $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{(x - y)^4}{4}$ на границе квадрата $x = 1$, $0 \leq y \leq 1$. Получаем $f(1, y) = \frac{1}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{(y - 1)^4}{4} = g(y)$. При этом $g'(y) = y^2 + (y - 1)^3 = h(y)$ меняет знак, так что $g(y)$ не является монотонной функцией. Исследуем количество экстремумов функции $g(y)$, т.е. количество корней функции $h(y)$. Поскольку $h'(y) = 2y + 3(y - 1)^2 > 0$, функция $h(y)$ монотонна, а поскольку $h(0) = -1 < 0$ и $h(1) = 1 > 0$, то $h(y)$ имеет единственный корень, а $g(y)$ – единственный экстремум. Этот экстремум – минимум (знак производной меняется с минуса на плюс), так что наибольшее значение функции $g(y)$ достигается на одном из концов отрезка $[0; 1]$. Находим $g(0) = \frac{3}{4}$ и $g(1) = \frac{5}{6}$, так что наиболь-

шее значение функции на правой стороне квадрата равно $\frac{5}{6}$.

Рассмотрим теперь значения функции $f(x, y)$ на половине квадрата, определенной условиями $0 \leq x \leq 1, y \leq x$. Зафиксируем значение $y = y_0$. Тогда $f(x, y_0) = \frac{x^2}{2} + \frac{y_0^3}{3} + \frac{(x - y_0)^4}{4} = k(x)$, $k'(x) = x + (x - y_0)^3 > 0$, поскольку $x \geq y_0$. Следовательно, функция $k(x)$ является монотонно возрастающей и для всех точек (x, y) этой половины квадрата $f(x, y) \leq f(1, y) \leq f(1, 1)$.

Аналогично рассматривается вторая половина квадрата: $0 \leq y \leq 1, x \leq y$. На верхней границе $y = 1, 0 \leq x \leq 1$ функция имеет вид $f(x, 1) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{(x - 1)^4}{4} = g_1(x)$. Далее, $g_1'(x) = x + (x - 1)^3 = h_1(x)$, $h_1'(x) = 1 + 3(x - 1)^2 > 0$, так что у функции $h_1(x)$ есть единственный корень, а у функции $g_1(x)$ — единственный экстремум. При этом $g_1(0) = \frac{7}{12}$, а $g_1(1) = \frac{5}{6}$, так что наибольшее значение функции на верхней стороне квадрата равно $\frac{5}{6}$.

Наконец, если для этой части квадрата зафиксировать $x = x_0$, то $f(x_0, y) = \frac{x_0^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{(y - x_0)^4}{4} = k_1(y)$ и $k_1'(y) = y^2 + (y - x_0)^3 > 0$, так что $f(x, y) \leq f(x, 1) \leq f(1, 1)$. Окончательно получаем, что наибольшего значения, равного $\frac{5}{6}$, функция достигает в точке $(1; 1)$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. 2). 2. 2). 3. 4). 4. 3). 5. 2). 6. 1). 7. 1). 8. 3). 9. 5). 10. 1).

Вариант 2

1. В интервале 0–10 с точка движется по направлению оси X , а в интервале 10–15 с — в противоположную сторону. Искомое расстояние равно разности площадей двух треугольников:

$$l = S_1 - S_2 = 12,5 \text{ м}.$$

2. Нужно определить знак работы, совершенной газом. По первому закону термодинамики,

$$A = Q - \frac{3}{2} \nu R \Delta T = 177,5 \text{ Дж}.$$

Работа газа положительна, следовательно, объем газа увеличился.

3. На амперметре и лампочке напряжение $U_1 = 12 \text{ В} - 11 \text{ В} = 1 \text{ В}$. Ток через вольтметр $I_V = 11 \text{ В} / 50 \text{ Ом} = 0,22 \text{ А}$; значит, ток в лампочке

$I = 0,22 \text{ А} - 0,2 \text{ А} = 0,02 \text{ А}$. Отсюда находим сопротивления лампочки и амперметра:

$$R_{\lambda} = \frac{1 \text{ В}}{0,02 \text{ А}} = 50 \text{ Ом}, \quad R_A = \frac{1 \text{ В}}{0,2 \text{ А}} = 5 \text{ Ом}.$$

Если амперметр и вольтметр поменять местами, то общее сопротивление схемы будет

$$R = R_A + \frac{R_{\lambda} R_V}{R_{\lambda} + R_V} = 30 \text{ Ом}.$$

Тогда через амперметр течет ток

$$I'_A = \frac{U_0}{R} = 0,4 \text{ А},$$

а напряжение на вольтметре равно

$$U = U_0 - I'_A R_A = 10 \text{ В}.$$

4. Максимальное значение энергии катушки будет при $\cos 2\omega t = -1$. Следовательно, таким же будет и максимальное значение энергии электрического поля конденсатора:

$$W_{L \max} = W_{C \max} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

С другой стороны,

$$W_C = \frac{q^2}{2C}.$$

Отсюда получаем

$$q_m = \sqrt{2CW_{C \max}} = 10^{-4} \text{ Кл}.$$

5. Прежде всего нужно определить, в какую сторону движется брусок. При данных значениях силы и коэффициента трения брусок движется вверх по клину с ускорением

$$a = \frac{F - mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha}{m} = 2,4 \text{ м с}^2.$$

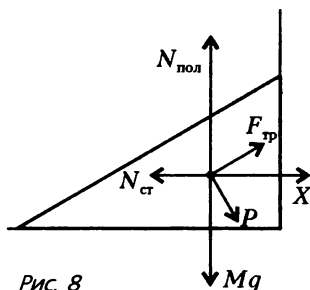


Рис. 8

Тогда на клин действуют силы, показанные на рисунке 8. Проецируя на ось X , находим силу реакции стены:

$$N_{\text{ст}} = F_{\text{тр}} \cos \alpha + P \sin \alpha = mg \cos \alpha \cdot (\mu \cos \alpha + \sin \alpha) = 32,9 \text{ Н}.$$

6. Если ключ был достаточно долго замкнут, то на конденсаторе установилось напряжение, равное ЭДС источника \mathcal{E} . Значит, заряд конденсатора до раздвижения пластин был $C_0 \mathcal{E}$, и он не изменится, когда пластины раздвинут. Емкость конденсатора в 2 раза уменьшается, что приводит к увеличению энергии электрического поля. Следовательно, была совершена работа

$$A = \Delta W_C = \frac{q^2}{2C} - \frac{q^2}{2C_0} = \frac{C_0 \mathcal{E}^2}{2} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

После раздвижения пластин напряжение на конденсаторе увеличивается в 2 раза и становится равным \mathcal{E} . Когда ключ снова замыкают, конденсатор начинает разряжаться через источник и разряжается, пока напряжение на нем вновь не станет равным \mathcal{E} . Закон сохранения энергии для всей цепи в этом случае имеет вид

$$A_{\text{ист}} = \Delta W_C + Q, \text{ или } Q = A_{\text{ист}} - \Delta W_C.$$

При расчете энергии конденсатора и работы источника учтем, что емкость конденсатора после раздвижения пластин равна $C_0/2$. Тогда

$$\begin{aligned}\Delta W_C &= \frac{C_0 \mathcal{E}^2}{4} - \frac{C_0 (2\mathcal{E})^2}{4} = -\frac{3}{4} C_0 \mathcal{E}^2, \\ A_{\text{ист}} &= \Delta q \mathcal{E} = \left(\frac{C_0 \mathcal{E}}{2} - C_0 \mathcal{E} \right) \mathcal{E} = -\frac{C_0 \mathcal{E}^2}{2}, \\ Q &= \frac{C_0 \mathcal{E}^2}{4}.\end{aligned}$$

Это тепло выделится как на резисторе, так и на внутреннем сопротивлении источника. Поскольку цепь последовательная, тепло распределится прямо пропорционально сопротивлениям. Таким образом, на резисторе выделится $1/3$ от общего количества теплоты в цепи:

$$Q_R = \frac{C_0 \mathcal{E}^2}{12} \approx 3,3 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

Характерное время установления заряда в цепи с конденсатором определяется произведением сопротивления цепи на емкость конденсатора. В этом можно убедиться, например, по размерности. Таким образом, до раздвижения пластин конденсатора время зарядки было примерно равно

$$\tau_1 = (R + r) C_0 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ с}.$$

После раздвижения пластин и замыкания ключа время уменьшения заряда на конденсаторе будет в 2 раза меньше, т.е.

$$\tau_2 = \frac{\tau_1}{2} = 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ с}.$$

Московский государственный институт электроники и математики

МАТЕМАТИКА

$$1. \pm \frac{1}{3}; 2; 3.$$

2. 2; 4. *Указание.* Поскольку $2008 = 2^3 \cdot 251$, таблица из условия задачи может иметь размеры 251×8 , 502×4 , 1004×2 . Рассмотрим их по отдельности.

1) 251×8 . Если вычислить произведение всех чисел в таблице, то при подсчете по столбцам оно будет положительным, а при подсчете по строкам – отрицательным. Противоречие.

2) 502×4 . Если каждая строка имеет вид $\boxed{-1\ 1\ 1\ 1}$, таблица удовлетворяет условию.

3) 1004×2 . Каждая строка имеет вид: $\boxed{-1\ 1}$, таблица подходит.

3. 60° . Указание. Пусть KD_1MB – сечение параллелепипеда плоскостью α , $M \in AA_1$, $K \in CC_1$. Повернем грань ADD_1A_1 вокруг ребра AA_1 так, чтобы она оказалась в одной плоскости с гранью ABB_1A_1 . Аналогично, повернем грань CDD_1C_1 вокруг ребра CC_1 так, чтобы она оказалась в одной плоскости с гранью CBB_1C_1 . Тогда $MD_1 = MD'_1$, $KD_1 = KD'_1$. Сумма отрезков $BM + MD'_1$ имеет наименьшую длину, когда M лежит на прямой BD'_1 . Аналогично, точка K должна лежать на прямой BD''_1 . Угол φ между плоскостями BMK и $ABCD$ равен углу между плоскостями BMK и $A_1B_1C_1D_1$. Треугольник $B_1D'_1D''_1$ прямоугольный и равнобедренный, поэтому высота треугольника, опущенная на его гипотенузу, равна $\frac{1}{2}\sqrt{10^2 + 10^2} = 5\sqrt{2}$, а $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}$ и $\varphi = 60^\circ$.

4. [15; 35]. Пусть $t = 4x + 3y$. Тогда $y = \frac{t - 4x}{3}$. Подставляя это выражение в данное соотношение, получим $25x^2 - 8tx + t^2 - 18t - 525 = 0$. Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно x . Его решение существует тогда и только тогда, когда дискриминант неотрицателен, т.е. если $D/4 = -t^2 + 50t - 525 \geq 0$. Решая это неравенство, получаем $t \in [15; 35]$.

$$5. 1) f(1) = \frac{1}{16}; 2) f(x) = \frac{3 - x^4}{32x^2}.$$

6. $-3; -\frac{5}{3}; -\frac{1}{2}$. Указание. Пусть $m = \frac{a+3}{a+1}$, $n = \frac{2a+15}{a+4}$. Тогда $a = \frac{m-3}{1-m}$ и $n = \frac{13m-9}{3m-1} = \frac{1}{3}\left(13 - \frac{14}{3m-1}\right)$. Получить такое представление можно методом неопределенных коэффициентов, записав $\frac{13m-9}{3m-1} = A + \frac{B}{3m-1}$, где A и B – коэффициенты, подлежащие определению. Тогда $13m - 9 = 3mA - A + B$. Приравнявая коэффициенты при m и свободные члены, получаем систему: $3A = 13$, $B - A = -9$. Отсюда $A = \frac{13}{3}$, $B = -\frac{14}{3}$.

Необходимо, чтобы дробь $\frac{14}{3m-1}$ была целым числом. Поэтому $k = 3m - 1 = \pm 1; \pm 2; \pm 7; \pm 14$. Проверкой убеждаемся, что годятся $m = 0$, $m = -2$, $m = 5$, после чего находим возможные значения a .

7. Построим внутри многоугольника 400 правильных пятиугольни-

ков. Для первого пятиугольника выберем номера вершин 2000-угольника: 1, 401, 801, 1201, 1601; для второго: 2, 402, 1202, 1602 и т.д. Любые три вершины правильного пятиугольника образуют равнобедренный треугольник. Пятиугольников 400, а красных вершин $801 = 400 \cdot 2 + 1$. Поэтому найдется пятиугольник, в котором есть по крайней мере три красные вершины. Они являются вершинами равнобедренного треугольника.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $\varepsilon = I(R + r) = 6,0 \text{ В}$. 2. $Q = mgh = 500 \text{ Дж}$.

3. $T = T_0 + \frac{2A}{3vR} = 297 \text{ К}$.

4. $L = \frac{U_0^2}{2W\omega^2} = 1,0 \text{ мГн}$. 5. $v_{\min} = \frac{m + M}{m} \sqrt{5gl} = 155 \text{ м/с}$.

Вариант 2

1. $I = \frac{\varepsilon}{R + r} = 0,40 \text{ А}$. 2. $Q = \frac{mv^2}{2} = 0,42 \text{ кДж}$.

3. $A = \frac{3vR\Delta T}{2} = 0,25 \text{ кДж}$.

4. $k = \frac{2W}{x_m^2} = 100 \text{ Н/м}$, $m = \frac{2W}{x_m^2\omega^2} = 0,39 \text{ кг}$.

5. $\varepsilon = \frac{\pi\omega B_0 l^2}{3} = 25 \text{ мВ}$.

Вариант 3

1. $s_{\min} = L \sin \alpha = 5,0 \text{ м}$. 2. $\frac{W_A}{W_B} = n^2 = 12,25$.

3. $v = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2}{2}} \approx 453 \text{ м/с}$. 4. $\eta = \frac{\sqrt{n} - 1}{4(\sqrt{n} + 1)} = \frac{1}{12} \approx 8,3\%$.

5. $t_2 = \frac{7t_0 + t_1}{8}$.

6. См. рис.9.

7. Если $mg > F_{\text{электр}}$, то $h = \frac{mgH}{mg - qE}$; если $mg < F_{\text{электр}}$, то h неограниченно велико.

8. Зависимость — линейная.

9. $s = \frac{Et}{B}$. 10. $F = \frac{l^2 - a^2}{4l} = 16 \text{ см}$.

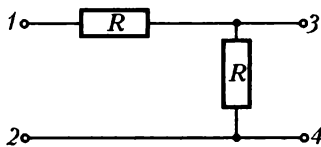


Рис. 9

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $s = \frac{vt}{2} = 75 \text{ м.}$ 2. $F_{\text{тр}} = m(2\pi n)^2 r \approx 39 \text{ мН.}$
3. $|\Delta \vec{p}| = 2mv \cos \alpha = 6 \text{ кг} \cdot \text{м/с.}$ 4. $\frac{\langle v_{\text{в}} \rangle}{\langle v_{\text{к}} \rangle} = \sqrt{\frac{M_{\text{к}}}{M_{\text{в}}}} = \sqrt{\frac{32}{2}} = 4.$
5. $Q = \rho_{\text{в}} V (c_{\text{в}} (t_1 - t_0) + \lambda) \approx 390 \text{ кДж.}$
6. $N = \frac{mgd}{eU} = 2 \cdot 10^8.$ 7. $n = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} = 4.$
8. $T = \frac{2\pi L}{X_L} = 20 \text{ мс.}$ 9. $H = h \frac{\text{tg} \alpha + \text{tg} \beta}{\text{tg} \beta - \text{tg} \alpha} \approx h \frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha} = 210 \text{ м.}$
10. $t = -T \log_2 (1 - \delta) = 84 \text{ года.}$

Вариант 2

1. $l = \frac{2v_1 \sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{g} = 9,6 \text{ м.}$ 2. $T = m \left(\frac{v^2}{l} + g \sin \alpha \right) = 23 \text{ Н.}$
3. $A = \frac{mv^2}{2} = 0,8 \text{ Дж.}$ 4. $\frac{m_1}{m_2} = \frac{M_1 p_1}{M_2 p_2} = \frac{1}{2}.$
5. $A = Q \left(1 - \frac{\delta}{100\%} \right) = 2,8 \text{ кДж.}$ 6. $\frac{C_2}{C_1} = \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon} = 1,5.$
7. а) $I = \frac{\mathcal{E}}{6R} = 0,2 \text{ А;}$ 6) $\frac{q_1}{q_2} = \frac{5}{3}.$ 8. $I = \frac{BLv}{R}.$ 9. $F = \frac{df}{f - d} = 60 \text{ см.}$

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 8 деталей. 2. $\pi + 2n\pi, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, n, k \in \mathbb{Z}.$ 3. $\{-1\}.$
4. $(3/4; 1) \cup (1; 3).$ Указание. Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} (x-1)(4x-3-x^2) > 0, \\ x > \frac{3}{4}, x \neq 1. \end{cases}$$

5. $\{-3\} \cup [1; 2].$

6. $[-\sqrt{3}/2; 1].$ Указание. Функция $z(x) = \left(\sqrt{\pi^2 - x^2} - \frac{\pi}{3} \right)$ принимает все значения из промежутка $-\pi/3 \leq z \leq 2\pi/3$. На этом промежутке функция $\sin z$ принимает наименьшее значение $f(-\pi/3) = -\sqrt{3}/2$ и наибольшее значение $f(\pi/2) = 1$.

7. $\arcsin(1/3)$. *Указание.* Соединим точку D – середину катета, лежащего против данного острого угла, – с центром O окружности, описанной около треугольника ABC . Треугольник ODB – прямоугольный. Следовательно, точка D лежит на окружности с диаметром OB . Угол DAB максимален, если AD касается этой окружности.

8. 4. *Указание.* Уравнение прямой, на которой лежит гипотенуза, имеет вид $y = kx + 1$, где $k < 0$. Эта прямая пересекает прямые $x = -2$ и $y = 0$ в точках $(-2; 1 - 2k)$ и $(-\frac{1}{k}; 0)$. Площадь треугольника при этом равна $S(k) = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{k}\right)(1 - 2k)$. Осталось исследовать $S(k)$ с помощью производной.

9. $x = y = a \pm \sqrt{8a - 16}$ при $a \in (2; 4) \cup (4; 10) \cup (10; +\infty)$;

$x = 8, y = 8$ при $a = 4$;

$x = 18, y = 18$ при $a = 10$;

\emptyset при остальных a .

Указание. Второе уравнение равносильно системе $x > 0, x \neq 2, y = x$. Подставляя $y = x$ в первое уравнение, получаем $(x - a)^2 = 8(a - 2)$. Количество решений заданной системы уравнений зависит от числа корней этого квадратного уравнения.

Очевидно, при $a < 2$ уравнение решений не имеет. Рассмотрим случаи, когда система будет иметь два различных решения. Квадратное уравнение будет иметь два различных положительных корня $x_{1,2} = a \pm \sqrt{8a - 16}$, если

$$\begin{cases} 8a - 16 > 0, \\ a > 0, \\ a^2 - 8a + 16 > 0, \\ 4 - 4a + a^2 - 8a + 16 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < a < 4 \\ 4 < a < 10 \\ 10 < a < +\infty. \end{cases}$$

Осталось рассмотреть уравнение при $a = 2, a = 4$ и $a = 10$.

10. 14; 14. Пусть M – середина ребра TB (рис.10). Проведем $MF \parallel TD, F \in AB, DF = FB = AB/4$; $S = (MF) \cap (AT)$, $SF = \frac{3}{2}TD$ и $AS = \frac{3}{2}AT$. Так как $TD = 2MF$, то $SM = \frac{2}{3}SF$. Если E – середина стороны AC и $N = SE \cap TC$, то $EFMN$ – сечение пирамиды заданной в условии секущей плоскостью. Проведем $TG \parallel SE$. Так как $SE =$

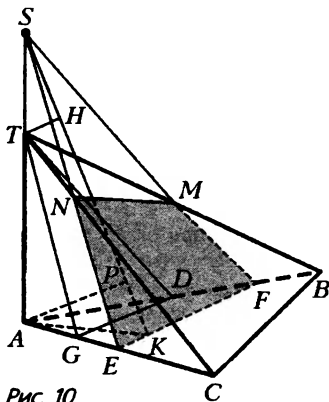


Рис. 10

$= \frac{3}{2}TG$ и $NE = \frac{3}{4}TG$, то $SN = NE = \frac{SE}{2}$. Следовательно, площадь треугольника MSN

$$S_{\Delta MSN} = \frac{1}{3} S_{\Delta FSE}.$$

Проведем $AK \perp FE$, $K \in FE$, $SK \perp FE$, и $TH \perp SK$, $H \in SK$. Так как $TH \perp (SFE)$, то длина TH равна заданному в условии задачи расстоянию от вершины пирамиды T до секущей плоскости. Введем обозначения $a = AB$ и $d = TH$, тогда $AP = 3d$. Так как $TH = \frac{1}{3}AP$ и $S_{\Delta MSN} = \frac{1}{3} S_{\Delta FSE}$, то $V_{TMSN} = \frac{1}{9} V_{AFSE}$. Сравним объемы пирамид $SAFE$ и $TABC$. Очевидно, $V_{SAFE} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot V_{TABC} = \frac{9}{16} V_{TABC}$. Следовательно, объем пятигранника $AFETMN$

$$V_{AFETMN} = \frac{8}{9} \cdot V_{SAFE} = \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{16} \cdot V_{TABC} = \frac{1}{2} \cdot V_{TABC},$$

т.е. секущая плоскость разбивает пирамиду на две равновеликие части.

По теореме косинусов находим, что $EF^2 = \frac{7a^2}{16}$; $EF = \frac{a\sqrt{7}}{4}$. Так как $\frac{1}{2} \cdot AK \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AF \cdot \sin 60^\circ$, $AK = \frac{3\sqrt{3}a}{4\sqrt{7}}$. Далее, $PK = \sqrt{AK^2 - AP^2} = \frac{3\sqrt{3a^2 - 112d^2}}{4\sqrt{7}}$ и, следовательно, $AS = \frac{AP \cdot AK}{PK}$, $AT = \frac{2}{3} AS = \frac{2\sqrt{3}ad}{\sqrt{3a^2 - 112d^2}}$. Теперь без труда находим объем $TABC$:

$$V_{TABC} = \frac{a^2 d}{2\sqrt{3 - 112(d/a)^2}} = 28.$$

Вариант 2

1. 15 с и 18 с. 2. $\pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 3. $\{1/16; 2\}$. 4. $(0; 1)$.
5. $\{-6\} \cup [3; 4]$. 6. $[0; 1; +\infty)$. 7. $\frac{\sqrt{15}}{12}$. 8. 1; 4. 9. $x = y = a \pm 3\sqrt{a-2}$
при $a \in (2; 3) \cup (6; 11) \cup (11; +\infty)$; $x = y = a + 3\sqrt{a-2}$ при $a \in [3; 6] \cup \{11\}$; \emptyset при остальных значениях a . 10. $19\sqrt{3}/5$.

ФИЗИКА

Вариант 1

2. В первой. 3. $U = \frac{3}{2}pV = 9 \cdot 10^3$ Дж.

$$4. {}^9_4\text{Be} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{12}_6\text{C} + {}^1_0n. \quad 5. v = \frac{3\omega L}{4}.$$

$$6. A = -\frac{3}{\sqrt{2}} \frac{q\sigma L}{\epsilon_0}.$$

$$7. x = \frac{k(L_0 + r)}{k + \pi r^3 \rho \omega^2}. \text{ Указание. В установившемся режиме на муфту}$$

вдоль оси стержня действуют две силы: сила упругости пружины и радиальная составляющая архимедовой силы.

Вариант 2

$$2. h = \frac{v_0^2}{4g}. \quad 3. \text{ См. рис.11.}$$

$$4. \epsilon = A + \frac{p^2}{2m} = 7,85 \cdot 10^{-19} \text{ Дж, где}$$

$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ — масса электрона.

5. $F_d = \frac{3}{2}mg$. Указание. Ускорения шариков направлены по касательным к окружности (проекции сферической полости).

$$6. \eta = 0,087 = 8,7\%.$$

7. $v_{2\max} = \frac{q}{\sqrt{5\pi\epsilon_0 m L}}$. Указание. Воспользуйтесь соображениями симметрии и законами сохранения энергии и импульса.

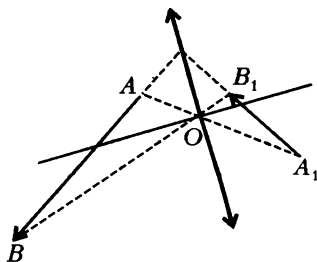


Рис. 11

Вариант 3

1. См. рис.12.

2. Сила направлена влево.

$$3. T_3 = 800 \text{ К}.$$

$$4. d = F \frac{1-k}{k} = 0,6 \text{ м, где } k = \frac{1}{4}.$$

$$5. l = \frac{Mh}{\mu(m+M)} = 0,8 \text{ м}.$$

$$6. Q = 3Fd.$$

$$7. t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L}{g}}. \text{ Указание. Жидкость в трубке совершает гармонические колебания с периодом } T = 4t.$$

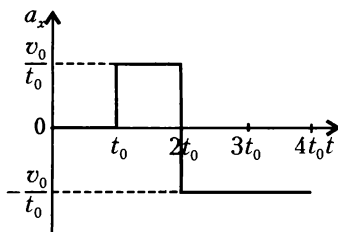


Рис. 12

Вариант 4

$$2. \text{ Второго.} \quad 3. \frac{\langle v_B \rangle}{\langle v_r \rangle} = \sqrt{2}.$$

$$4. p = F_0 t_0.$$

5. $Q = \frac{2}{3} mgh$. 6. На участках 1-2 и 2-3 (рис.13).

7. $U = 5$ В.

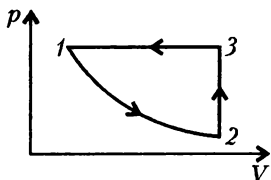


Рис. 13

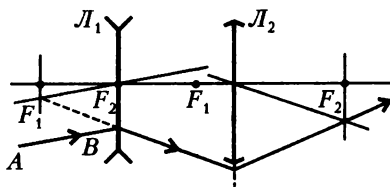


Рис. 14

8. По часовой стрелке (если смотреть со стороны магнита).

9. См. рис.14. 10. $p = p_0 + \rho gH - 4\rho\omega^2 R^2$.

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. -1. 2. 5.

3. 9; 49. *Указание.* Уравнения системы задают на плоскости xOy окружности: первая – с центром в точке O и радиусом 2, вторая – с центром $(3; -4)$ и радиусом \sqrt{a} . Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружности касаются внешним или внутренним образом.

4. Нет.

5. 3 или $2\sqrt{3}$. *Указание.* Из условия следует, что углы треугольника равны либо α , $90^\circ - \alpha$, 90° , либо α , $90^\circ + \alpha$, $90^\circ - 2\alpha$. Поскольку треугольник равнобедренный, он имеет углы либо 45° , 45° , 90° , либо 30° , 120° , 30° .

6. $[\log_{50} 8; \log_{50} 9)$. *Указание.* Заменой $t = 50^{\frac{x}{2}}$ неравенство приводится к виду $\sqrt{t^2 - 8} < 7 - 2t$.

7. $\frac{2\pi}{3} + 4\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. *Указание.* Поскольку

$$\sqrt{3} \left| \sin \frac{3x}{4} \right| \sin x - \cos x \leq \sqrt{3 \sin^2 \frac{3x}{4} + 1} \leq 2,$$

уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \left| \sin \frac{3x}{4} \right| = 1, \\ \sqrt{3} \sin x - \cos x = 2. \end{cases}$$

8. $3\sqrt{29}$ или $3\sqrt{61}$. Пусть A и B – смежные вершины параллелограмма. Если параллельно перенести прямую l на вектор \overrightarrow{BA} , то получится прямая l' , проходящая через середины отрезков $A'A$ и $C'C$ (рис.15). Эта прямая пересекает прямую $A'C$ в середине D отрезка $A'C$. Точка D получается из некоторой точки $L \in l$ параллельным переносом на вектор \overrightarrow{BA} , так что $ABLD$ – искомый параллелограмм. Прямоугольный треугольник ABD (прямая AB перпендикулярна всей плоскости $ACC'A'$) является половиной этого параллелограмма. Площадь

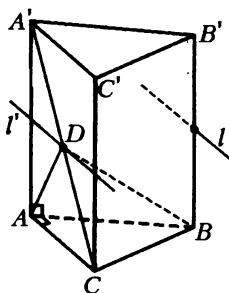


Рис. 15

этого треугольника равна $\frac{1}{2} AB \cdot AD = \frac{1}{4} AB \cdot A'C = \frac{3}{4} \sqrt{10^2 + 4^2} = \frac{3}{2} \sqrt{29}$, а значит, площадь параллелограмма равна $3\sqrt{29}$.

Если же A и B – противоположные вершины параллелограмма, то две другие его вершины симметричны относительно середины K отрезка AB . Прямая l' , симметричная прямой l относительно середины K отрезка AB , проходит в плоскости $ACC'A'$ параллельно прямой AC на расстоянии 5 от нее и пересекает прямую $A'C$ в точке E (рис.16). Точка E симметрична некоторой точке $L \in l$ относительно середины отрезка AB , так что $AEBL$ – искомый параллелограмм. Прямоугольный треугольник ABE является половиной этого параллелограмма. Площадь этого треугольника равна $\frac{1}{2} AB \cdot AE = \frac{3}{2} \sqrt{AF^2 + FE^2} = \frac{3}{2} \sqrt{5^2 + 6^2}$, а значит, площадь

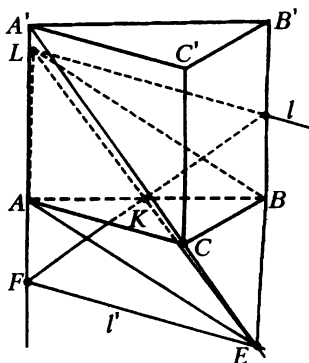


Рис. 16

параллелограмма равна $3\sqrt{61}$.

9. $n = 1, \dots, 2002$. Действительно,

$$2002 \left[n \sqrt{1001^2 + 1} \right] = n \left[2002 \sqrt{1001^2 + 1} \right] \Leftrightarrow 2002 \left[n(1001 + \alpha) \right] = \\ = n \left[2002(1001 + \alpha) \right] \Leftrightarrow 2002[n\alpha] = n[2002\alpha]$$

$$(\Leftrightarrow 0 \text{ так как } \alpha = \sqrt{1001^2 + 1} - 1001 = \frac{1}{\sqrt{1001^2 + 1} + 1001} \in \left(\frac{1}{2003}; \frac{1}{2002} \right)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < n\alpha < 1 \Leftrightarrow n = 1, 2, \dots, 2002.$$

10. 12. Для любых пар чисел $a \leq b$ и $A \leq B$ имеем

$$|a - A| + |b - B| \leq |a - M| + |M - A| + |b - M| + |M - B| \leq |a - B| + |b - A|,$$

где M – любая точка, лежащая между a и B , а также одновременно между b и A . Из этого неравенства следует, что при фиксированных зеленых точках для достижения наименьшей суммы длин 4 отрезков меньшую из зеленых точек достаточно соединять отрезком с меньшей из синих, вторую по величине зеленую – со второй по величине синей, третью зеленую – с третьей синей, а четвертую – с четвертой.

1) Пусть арифметическая прогрессия возрастает. Тогда зеленые точки расположены в порядке $-5, -5 + d, -5 + 2d, -5 + 3d$, а синие – в порядке $-8, -2, 4, 16$, и задача сводится к нахождению минимума функции

$$\begin{aligned} f(d) &= 3 + |d - 3| + |2d - 9| + |3d - 21| = 3 + |d - 3| + 2|d - 4,5| + 3|d - 7| \geq \\ &\geq 3 + d - 3 + 2d - 9 - 3d + 21 = 12 = f(5), \end{aligned}$$

который, таким образом, равен 12.

2) Если же арифметическая прогрессия не возрастает, то расстояние от синей точки 16 до любой зеленой точки будет не меньше 21, т.е. больше 12.

Вариант 2

1. $(-\infty; -1] \cup \{1\} \cup [2; +\infty)$.

2. Да. Пример уравнения: $(\sin 3x - 1) \left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0$. Указание.

Изобразите ответ, полученный Игорем, на единичной окружности. Точно так же выглядит изображение ответов из учебника.

3. $\left(1; \frac{1}{2}\right)$. Указание. Система преобразуется к виду

$$\begin{cases} \log_2 x^2 + \log_2 (2x + 4y - 3) = \alpha \log_2 4y^2 + \alpha \log_2 (x + 6y - 3), \\ \alpha \log_2 x^2 + \alpha \log_2 (x + 6y - 3) = \log_2 4y^2 + \log_2 (2x + 4y - 3), \end{cases}$$

где $\alpha = \log_{11} 2 \in (0; 1)$. Равносильная ей система имеет вид

$$\begin{cases} (1 + \alpha) \log_2 x^2 = (1 + \alpha) \log_2 4y^2, \\ \log_2 (2x^3 + 4x^2y - 3x^2) = \alpha \log_2 (4xy^2 + 24y^3 - 12y^2). \end{cases}$$

Из первого уравнения либо $x = 2y$, либо $x = -2y$. Дальнейшее ясно.

4. 6 : 5; 13. Проведем отрезок OF (рис.17). Имеем

$$\begin{aligned} \angle OCF + \angle COF &= \angle OFB = \angle OBC = \\ &= \angle BCO + \angle EOA \Rightarrow \angle COF = \angle EOA, \end{aligned}$$

поэтому дуги, отсекаемые этими углами на окружности, равны, а значит, $EF \parallel AC$.

Отсюда треугольник EBF гомотетичен треугольнику ABC с центром гомотетии B и коэффициентом k . Имеем (см. рис. 17) $EG = 12k$, $GF = 10k$, а значит, $EG : GF = 6 : 5$, $BG = 6k$. По теореме о равенстве произведений отрезков хорд

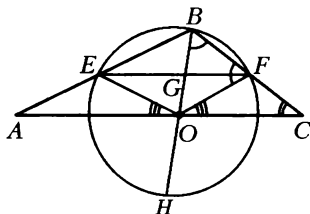


Рис. 17

имеем $BG \cdot GH = EG \cdot GF$, т.е. $6k(12 - 6k) = 12k \cdot 10k$, $k = \frac{6}{13}$, откуда радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен $\frac{6}{k} = 13$.

5. $f(x) = x^3 - x + 1$. Подставим в уравнение $x = 1$ и $x = 0$:

$$\begin{cases} f(1) + (1-2)f(1) + 3f(0) = 1^3 + 2, \\ f(0) + (0-2)f(1) + 3f(0) = 0^3 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3f(0) = 3, \\ 4f(0) - 2f(1) = 2, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} f(0) = 1, \\ f(1) = 1, \end{cases}$$

откуда $f(x) = x^3 + 2 - f(1)(x-2) - 3f(0) = x^3 - x + 1$, причем найденная функция удовлетворяет уравнению.

6. 7. Пусть дано n окружностей. Если должным образом слегка пошевелить плоскости, то каждая из 10 «тройных» точек пересечения распадется на три «двойные» точки пересечения окружностей и каждые две окружности будут пересекаться в двух таких точках. Таким образом, каждая из n окружностей будет содержать $2(n-1)$ точек пересечения, а всего точек пересечения будет $\frac{n \cdot 2(n-1)}{2} = 42$, откуда $n = 7$.

Вариант 3

1. $[-3; 2) \cup (5; 7]$.

2. 60 км/ч. Пусть u — скорость первого автомобиля. Тогда скорость второго автомобиля равна $\frac{3}{2}u$. Пусть, далее, второй автомобиль стартует через τ ч и встречается с первым через t ч после старта первого автомобиля. Из условия задачи следует, что $t > \tau$, так как первый достиг пункта B через 3 часа после встречи.

Рассмотрим два случая.

а) Пусть $\tau \geq 5$ (т.е. в 13^{00} второй автомобиль еще не стартовал, и, следовательно, время оставшегося пути первого автомобиля до пункта B должно быть больше 3 часов). Тогда $5u = 540 - 150$, $u = 78$ и, значит,

время, затраченное на оставшийся путь, будет равно $\frac{150}{78} < 3$ ч, т.е. случай а) невозможен.

б) Пусть $0 < \tau < 5$. Тогда

$$\begin{cases} \left| 540 - \left(5u + \frac{3}{2}u(5 - \tau) \right) \right| = 150, \\ tu + (t - \tau)\frac{3}{2}u = 540, \\ (t + 3)u = 540. \end{cases}$$

Из второго и третьего уравнений системы находим, что $\tau = t - 2$, $u = \frac{540}{t + 3}$, после чего из первого уравнения получаем

$$|9t - 45| = t + 3, \text{ откуда } \begin{cases} t = 6 \\ t = \frac{21}{5}. \end{cases}$$

Соответственно, имеем две ситуации.

1) Если $t = 6$, $\tau = 4$, $u = 60$, $\frac{3}{2}u = 90$, то второй автомобиль прибыл в пункт А позже, чем первый прибыл в В.

2) Если $t = \frac{21}{5}$, то второй автомобиль прибывает в пункт А раньше, чем первый прибыл в В, что противоречит условию.

3. $\left[2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n \right]$, $n \in \mathbb{Z}$. Указание. Исходное неравенство перепишется в виде

$$|\cos x - \sin x| + |\sin x| \leq \cos x.$$

Положим $a = \cos x - \sin x$, $b = \sin x$. Тогда $\cos x = a + b$ и неравенство принимает вид $|a| + |b| \leq a + b$, или $(|a| - a) + (|b| - b) \leq 0$, но это значит, что

$$\begin{cases} |a| = a, \\ |b| = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом, $\begin{cases} \cos x \geq \sin x, \\ \sin x \geq 0, \end{cases}$ откуда и следует ответ.

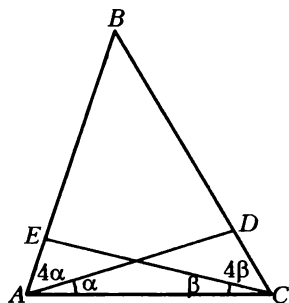


Рис. 18

$$4. \quad \sqrt{2}; \quad \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}{2}. \text{ Пусть}$$

$\angle DAC = \alpha$, $\angle ACE = \beta$ (рис.18), тогда $\angle BAD = 4\alpha$, $\angle BCE = 4\beta$. Записывая S — площадь треугольника ABC — двумя

способами:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot CE \cdot \sin \angle BEC = \frac{1}{2} BC \cdot AD \cdot \sin \angle BDA$$

и учитывая условие задачи, получаем

$$\sin \angle BEC = \sin \angle BDA, \text{ т.е. } \sin(5\alpha + \beta) = \sin(\alpha + 5\beta).$$

Поскольку α и β – углы треугольника, из последнего равенства следуют всего лишь две возможности.

а) $\alpha + 5\beta = 5\alpha + \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$. Тогда $BC = AB = 2$, а площадь треугольника ABC равна

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle B = 2 \sin \angle B = 2 \sin 10\alpha.$$

По следствию из теоремы синусов для треугольника ABC , где R – радиус описанной окружности, получим

$$\sin 5\alpha = \sin 5\beta = \frac{AB}{2R} = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}},$$

$$S = 4 \sin 5\alpha \cos 5\alpha = 4 \frac{1 + \sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

б) $6(\alpha + \beta) = \pi$, т.е. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{6}$. Тогда $\angle B = \pi - 5(\alpha + \beta) = \frac{\pi}{6}$. Согласно теореме синусов, $\frac{BC}{\sin 5\alpha} = \frac{AB}{\sin 5\beta}$. Отсюда

$$\begin{aligned} BC &= \frac{AB \sin 5\alpha}{\sin 5\beta} = \frac{2 \sin\left(\frac{5\pi}{6} - 5\beta\right)}{\sin 5\beta} = \operatorname{ctg} 5\beta + \sqrt{3} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{\sin^2 5\beta} - 1} + \sqrt{3} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

(Случай $\operatorname{ctg} 5\beta < 0$, соответствующий выбору знака минус перед радикалом, не имеет места, ибо приводит к $BC < 0$.) Итак, в этом случае площадь треугольника ABC равна

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}.$$

5. Таких участников нет. Рассмотрим группу из 11 игроков, набравших в итоге не более пяти очков каждый. В $\frac{11 \cdot 10}{2} = 55$ играх между собой они разыграли 55 очков. Так как, по условию задачи, эти участники вместе набрали не более 55 очков, то все очки (ровно 55) эти шахматисты получили в играх между собой. Следовательно, всем

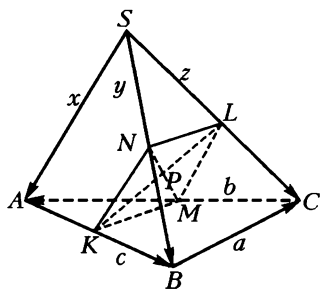


Рис. 19

остальным участникам турнира они проиграли. Поэтому любой из оставшихся шахматистов набрал не менее 11 очков (выиграв, по крайней мере, у каждого из членов первой группы). Итак, по завершении турнира не будет участников, которые набрали бы 8,5 очка.

6. $2\sqrt{21}$. Заметим, что четырехугольник $KMLN$ – параллелограмм (рис.19).

Введем теперь в рассмотрение векторы $\overrightarrow{SA} = \vec{x}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{y}$ и $\overrightarrow{SC} = \vec{z}$, а также $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$. Тогда $\vec{a} = \vec{z} - \vec{y}$, $\vec{b} = \vec{x} - \vec{z}$, $\vec{c} = \vec{y} - \vec{x}$, и

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(\vec{y} \cdot \vec{z} + \vec{z} \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \vec{y})$$

(здесь $\vec{x} \cdot \vec{y}$ – скалярное произведение векторов \vec{x} и \vec{y} ; $a^2 = |\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$ и т.п.). Поскольку по условию

$$a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 \equiv X,$$

то из предыдущего равенства имеем $2(\vec{y} \cdot \vec{z} + \vec{z} \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \vec{y}) = X$.

Так как $\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SN} + \overrightarrow{NP}$ и $\overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{NK} + \overrightarrow{NL})$, то

$$\overrightarrow{SP} = \frac{1}{2}\vec{y} + \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{y} + \frac{1}{4}(\vec{z} - \vec{y}) + \frac{1}{4}\vec{x} = \frac{1}{4}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}).$$

Пусть R и O – радиус и центр описанной около пирамиды $SABC$ сферы, $\overrightarrow{SO} = \vec{R}$; тогда $|\overrightarrow{SO}| = |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{BO}| = |\overrightarrow{CO}| = R$.

Поскольку $|\overrightarrow{OA}| = \vec{x} - \vec{R}$, после возведения в квадрат имеем

$$R^2 = R^2 + x^2 - 2\vec{R} \cdot \vec{x}, \text{ т.е. } x^2 = 2\vec{R} \cdot \vec{x}.$$

Аналогично, $y^2 = 2\vec{R} \cdot \vec{y}$, $z^2 = 2\vec{R} \cdot \vec{z}$, поэтому

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\vec{R} \cdot (\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}) = 8\vec{R} \cdot \overrightarrow{SP}.$$

Осталось использовать числовые данные задачи. Так как

$$|\overrightarrow{SP}|^2 = \frac{1}{16}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})^2 = \frac{1}{16}(x^2 + y^2 + z^2 + 2(\vec{y} \cdot \vec{z} + \vec{z} \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \vec{y})) = \frac{1}{8}X,$$

то $X = 8|\overrightarrow{SP}|^2 = 8 \cdot 63$, следовательно, $\vec{R} \cdot \overrightarrow{SP} = \frac{1}{8}X = 63$.

Наконец, из $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SP}$ вытекает $|\overrightarrow{OP}|^2 = |\overrightarrow{SP} - \vec{R}|^2$, так что

$$21 = R^2 - 2\vec{R} \cdot \overrightarrow{SP} + 63 \Leftrightarrow R^2 = 84 \Leftrightarrow R = 2\sqrt{21}.$$

Вариант 4

$$1. -1 + \log_2 \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad -1 + \log_2 2\pi k, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$2. \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \leq x \leq 2; \quad 3 \leq x \leq \frac{5 + \sqrt{5}}{2}. \quad 3. \log_2 9.$$

4. $4\sqrt{20}$. *Указание.* Из симметрии прямоугольника $ABCD$ и полуокружности относительно прямой, перпендикулярной AD и проходящей через центр полуокружности, следует, что $BM = NC$. Пусть $BM = x$. Тогда $BN = 12 - x$ и, по теореме о квадрате касательной, $x(12 - x) = 16$, откуда $BM = x = 6 - \sqrt{20}$, $MN = 2\sqrt{20}$. Поэтому $S_{AMN} = 4\sqrt{20}$.

5. $(0; 1) \cup (1; 6)$. *Указание.* Во всех логарифмах перейдите к основанию 2.

6. $(\sqrt{5}/2; \sqrt{5}/2)$, $(-\sqrt{5}/2; -\sqrt{5}/2)$. *Указание.* Сложите уравнения системы и выполните замену $t = \frac{x}{2y}$.

7. $-\frac{5}{4} < a < \frac{5}{4}$, $a \neq \pm 1$. *Указание.* Уравнение равносильно совокупности из двух уравнений

$$\begin{cases} x^2 - x - 1 - a = 0 \\ x^2 + x + a - 1 = 0, \end{cases}$$

поэтому число решений не превышает четырех. Первое уравнение совокупности имеет 2 корня при $a > -\frac{5}{4}$, а второе — при $a < \frac{5}{4}$. Поэтому $-\frac{5}{4} < a < \frac{5}{4}$. Однако уравнения совокупности могут иметь общий корень, что и происходит при $a = \pm 1$. Итак, при $-\frac{5}{4} < a < \frac{5}{4}$ и $a \neq \pm 1$ исходное уравнение имеет четыре различных корня.

8. $3/\sqrt{22}$. Чтобы вычислить расстояние между двумя скрещивающимися прямыми AE и DF , можно включить их в две параллельные плоскости и найти расстояние между этими плоскостями.

Для этого (рис. 20) на ребре A_1B_1 возьмем точку E_1 такую, что $A_1E_1 = A_1E$, а на ребре B_1C_1 — точку F_1 так, что $F_1C_1 = C_1F$, и рассмотрим плоскости AEE_1 и BDF_1 . Эти плоскости параллельны (так как $AE_1 \parallel DF$, $AE \parallel BF_1$)

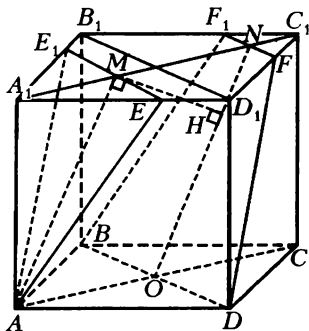


Рис. 20

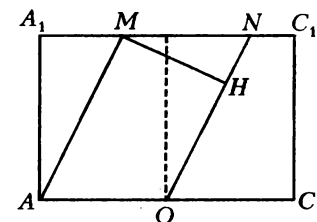


Рис. 21

треугольников AA_1M и MHN .

и перпендикулярны плоскости AA_1C_1C (так как, например, вторая из плоскостей проходит через BD – перпендикуляр к AA_1C_1C). В плоскости AA_1C_1C опустим перпендикуляр MN на плоскость BF_1FD . Основание этого перпендикуляра лежит на ON . Осталось найти длину отрезка MN (рис.21), что нетрудно сделать, пользуясь подобием

Вариант 5

1. Может. Например, для любых натуральных взаимно простых m и n можно взять $p = 2^n$, $q = 2^m$.

2. Нет, так как равенство $m^q = n^p$ невозможно при выполнении условий задачи.

3. $\frac{23}{12}$. 4. 31° , 329° , 391° , 689° .

5. $1\sqrt{8}$. Указание. Треугольники KRL и QRS подобны.

6. $\left(-\infty; -\frac{\pi}{9}\right) \cup \left(\frac{\pi}{9}; +\infty\right)$. Указание. Как левая, так и правая части неравенства – четные функции. Исследуйте их поведение при $x \geq 0$.

Если $0 \leq x < \frac{\pi}{9}$, левая часть меньше правой; при $x = \frac{\pi}{9}$ они равны; а

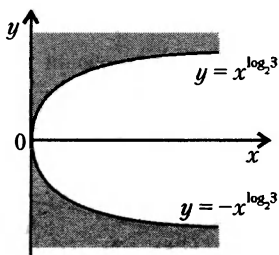


Рис. 22

при $x > \frac{\pi}{9}$ левая часть больше правой.

7. 1) Да. 2) Да. Указание. В обоих случаях треугольники AOM и BOL подобны.

8. См. рис.22. Неравенство равносильно тому, что $|y| > x^k$, $x > 0$, $k = \log_2 3$.

9. $(-\infty; 0] \cup [3^{1-a}; 3^a]$ при $a > \frac{1}{2}$;

$(-\infty; 0] \cup \{\sqrt{3}\}$ при $a = \frac{1}{2}$;

$(-\infty; 0] \cup [3^a; 3^{1-a}]$ при $a < \frac{1}{2}$.

Указание. Левая часть неравенства преобразуется к виду $x(x - 3^a)(x - 3^{1-a})$.

10. Указание. Проведите через точку B прямую, перпендикулярную плоскости CDE . Рассмотрите плоскость π , проходящую через BE и эту прямую, и докажите, что $CD \perp \pi$.

Вариант 6

1. $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. $-17/6$.

3. $\frac{1}{3}$. Указание. Неравенства $3x \leq 1$ и $6 - 15x \leq 1$ справедливы лишь при $x = \frac{1}{3}$.

4. $4\sqrt{2}$; 2. Так как $\angle BB'C = \angle BC'C = 90^\circ$, то четырехугольник $BB'C'C$ вписан в окружность диаметром BC (рис.23):

а) по теореме синусов для треугольника ABC имеем

$$R_{BB'C} = \frac{BC}{2} = R_{ABC} \sin \angle A = 6 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2};$$

б) из подобия треугольников $AB'C'$ и ACB (так как $\angle ABC = \angle AB'C'$) с коэффициентом k имеем

$$k = \frac{AB'}{AB} = \cos \angle B'AB = \frac{1}{3} \Rightarrow R_{AB'C'} = kR_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2.$$

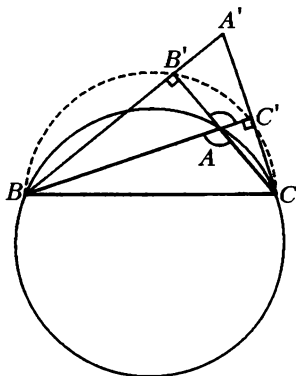


Рис. 23

5. Верны утверждения а) и в). Пусть данные числа a_1, \dots, a_{30} удовлетворяют для некоторого k условиям

$$a_1 + \dots + a_{30} = 4 \cdot 30, \quad a_1 \leq \dots \leq a_k < 0 < a_{k+1} \leq \dots \leq a_{30}.$$

Тогда:

а) среднее арифметическое чисел a_{k+1}, \dots, a_{30} больше 4, так как

$$a_{k+1} + \dots + a_{30} = 4 \cdot 30 - (a_1 + \dots + a_k) > 4 \cdot 30 > 4 \cdot (30 - k);$$

б) отрицательных чисел может быть больше, чем положительных, например,

$$a_1 = \dots = a_{29} = -1, \quad a_{30} = 4 \cdot 30 + 29 = 149 \quad (\Rightarrow a_1 + \dots + a_{30} = 4 \cdot 30);$$

в) сумма модулей отрицательных чисел меньше, чем сумма положительных, так как

$$a_{k+1} + \dots + a_{30} = -|a_1| - \dots - |a_k| + a_{k+1} + \dots + a_{30} = 4 \cdot 30 > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow |a_1| + \dots + |a_k| < a_{k+1} + \dots + a_{30};$$

г) модуль наибольшего отрицательного числа может быть больше, чем наибольшее положительное число, например,

$$a_1 = 4 \cdot 30 - 5 \cdot 29 = -25, \quad a_2 = \dots = a_{30} = 5 \quad (\Rightarrow a_1 + \dots + a_{30} = 4 \cdot 30).$$

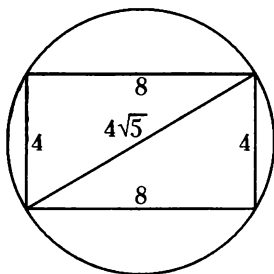


Рис. 24

6. $2\sqrt{5}$. С одной стороны, если смотреть на наибольший помещенный в каркасе шар вдоль длинной стороны параллелепипеда, то его диаметр не превзойдет диаметра окружности, описанной около прямоугольника размером 4×8 , т.е. его диагонали, равной $\sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$ (рис.24). С другой стороны, шар диаметра $4\sqrt{5}$ помещается в каркасе, так как диаметр шара меньше расстояния между двумя противоположными гранями размером 4×8 данного параллелепипеда.

7. $a > 3 + \sqrt{20}$. Указание. Заметим, что

$$x^4 + (a+1)x^3 + (2a+1)x^2 - (a+1)x + 1 = 0 \quad (\Rightarrow x \neq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 + (a+1)\left(x - \frac{1}{x}\right) + (2a+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 + (a+1)y + 2a + 3 = 0,$$

где функция $y = f(x) \equiv x - \frac{1}{x}$ возрастает на промежутке $(-\infty; -1)$ от $-\infty$ до $f(-1) = 0$. Поэтому исходное уравнение имеет не менее двух корней на промежутке $(-\infty; -1)$ тогда и только тогда, когда полученное уравнение имеет два корня $y_{1,2} \in (-\infty; 0)$, т.е. когда

$$\begin{cases} a+1 > 0, \\ 2a+3 > 0, \\ (a+1)^2 - 4(2a+3) > 0. \end{cases}$$

Вариант 7

1. 2. $(-\infty; -\sqrt{26}] \cup \{-1\} \cup [\sqrt{26}; +\infty)$.

3. $\left(3; \frac{7}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{2}; \frac{19}{5}\right) \cup (4; 5)$. 4. $\frac{7\pi}{2}$.

5. $\frac{51}{96}$. Указание. Согласно свойству биссектрисы треугольника, если $QO = 3x$, а $PQ = 3y$, то $OR = 4x$ и $PR = 4y$. Поэтому периметр треугольника PQR равен

$$7(x+y) = 21, \text{ откуда } x+y = 3.$$

Из формулы для биссектрисы: $PO^2 = PR \cdot PQ - OR$ получаем равен-

$$(y - x)(x + y) = 3.$$

6. Утверждения а) и в) справедливы, утверждения б) и г) ошибочны. Обозначим через p и q соответственно количество положительных и отрицательных чисел в данной совокупности $\{n_k\}$, где $k = 1, 2, \dots, 40$, $p, q \in \mathbb{N}$. Пусть S^+ – сумма всех положительных чисел, а S^- – абсолютная величина суммы отрицательных чисел. Тогда справедливы равенства

$$p + q = 40, \quad \frac{S^+ - S^-}{40} = 5.$$

Рассмотрим далее предложенные в условии задачи утверждения.

а) Утверждение верно, так как из $S^+ - S^- = 200$ следует

$$\frac{S^+}{p} = \frac{200 + S^-}{p} > \frac{200}{p} > \frac{200}{40} = 5.$$

б) Неверно, что следует из примера: $p = 39$, $q = 1$; $n_1 = \dots = n_{39} = 6$, $n_{40} = -34$.

в) Справедливость утверждения следует из а). В самом деле, пусть максимальное положительное число меньше 5. Тогда

$$S^+ = n_1 + n_2 + \dots + n_p < 5p \Leftrightarrow \frac{S^+}{p} < 5,$$

что противоречит доказанному в а).

г) Утверждение неверно, как показывает следующий пример: $n_1 = 239$, $n_2 = n_3 = \dots = n_{40} = -1$.

7. $x = 2\pi n - 2$, $n \in \mathbb{Z}$, если $a = \pi n$. После замены $t = x + 2$ уравнение принимает вид

$$t^2 - 4at + 4a^2 + 2 = \cos t + \cos(t - 4a) \Leftrightarrow (t - 2a)^2 + 2 = 2 \cos(t - 2a) \cos 2a.$$

Левая часть последнего уравнения не меньше 2, а правая – не превышает 2, поэтому решение существует тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} t - 2a = 0, \\ \cos(t - 2a) \cos 2a = 1, \end{cases}$$

откуда $t = 2a$, $a = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

8. $\arccos \sqrt{\frac{2}{5}} = \arctg \sqrt{\frac{3}{2}}$. Пусть длина ребра данного куба равна 1, а

RQ – общий перпендикуляр к прямым AC и DC_1 (рис.25). Обозначим $RQ = h$, $CR = x$, $DQ = y$, $DR = z$. Тогда из пары прямоугольных треугольников RQD и QRC , а также из треугольников RCD и QDC ,

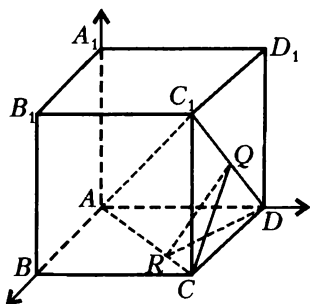


Рис. 25

имеющих по углу величиной 45° , имеем

$$z^2 = h^2 + y^2; \quad z^2 = x^2 + 1 - \sqrt{2}x;$$

$$CQ^2 = h^2 + x^2; \quad CQ^2 = y^2 + 1 - \sqrt{2}y.$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = h^2 - 1 + \sqrt{2}x, \\ x^2 - y^2 = -h^2 + 1 - \sqrt{2}x. \end{cases}$$

После сложения и вычитания уравнений приходим к равносильной системе

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{2}(1 - h^2), \\ 2(x^2 - y^2) = \sqrt{2}(x - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \sqrt{2}(1 - h^2), \\ x - y = 0 \\ x + y = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

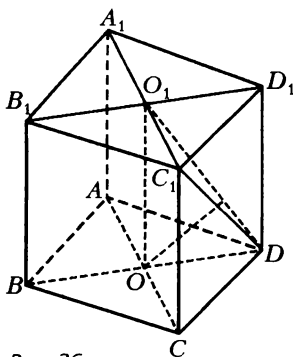


Рис. 26

Найдем теперь расстояние h между скрещивающимися прямыми. Как известно, оно равно расстоянию от точки, являющейся проекцией одной из этих прямых на перпендикулярную ей плоскость, до проекции другой прямой на ту же плоскость. В нашем случае проектирование происходит на диагональную плоскость BDD_1B_1 (рис. 26), а h — это длина высоты прямоугольного треугольника DOO_1 , проведенной к его гипотенузе DO_1 (здесь O , O_1 — центры нижней и верхней граней соответственно). Поскольку $OO_1 = 1$,

$$OD = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ то } DO_1 = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \text{ поэто-}$$

му $h = \frac{OO_1 \cdot OD}{DO_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. При этом значении h равносильная система имеет единственное решение $x = y = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Теперь из треугольника RDQ находим

$$\operatorname{tg} \angle RDQ = \frac{RD}{DQ} = \frac{h}{y} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Вариант 8

1. $\left[-\frac{7}{2}; -3\right) \cup (-3; +\infty)$.

2. 3,2 км/ч.

3. $-\frac{31}{17}$.

$$4. (-\infty; -2] \cup \left(-2^{-\frac{3}{2}}; 0\right).$$

5. Да: Гоша. Заметим, что если у какого-либо школьника имеются два защитника из числа остальных троих, то он заведомо не виноват, поскольку хотя бы один из двух его защитников, согласно условию, точно говорит правду.

Алика и Витю защитили двое (явно Боря и косвенно Гоша), Борю – также двое (явно Витя и косвенно Алик). А Гошу защитил только один (косвенно Алик), следовательно, стекло мог разбить только Гоша.

6. $\sqrt{13}, 2\sqrt{13}, \sqrt{13}, 2\sqrt{13}$. *Указание.* Докажите, что четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.

7. 4; $\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$. Так как $|a| \geq a$, имеем неравенство

$$|x - 3y - 4| + |3y + 8 - x| + \sqrt{x^2 - xy - 2y^2} \geq \\ \geq (x - 3y - 4) + (3y + 8 - x) + 0 = 4,$$

которое обращается в равенство тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} x - 3y - 4 \geq 0, \\ 3y + 8 - x \geq 0, \\ x^2 - xy - 2y^2 = 0, \end{cases}$$

т.е. в точках двух отрезков прямых $x = -y$ при $-2 \leq y \leq -1$ и $x = 2y$ при $-8 \leq y \leq -4$.

Вариант 9

$$1. \frac{7}{3}. \quad 2. -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, n, m \in \mathbf{Z}. \quad 3. (-\infty; -1) \cup (0; 2).$$

$$4. \frac{5\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{3}. \quad \text{Указание. Так как углы } BDL \text{ и } BEL - \text{ прямые,}$$

равенство из условия задачи означает, что $\cos \angle A = \cos \angle C$, откуда $\angle A = \angle C$, треугольник ABC – равнобедренный, а окружность касается AC в точке L .

5. 333 монеты. Пусть N – общее количество золотых монет и каждому пирату досталось по x, y, z монет при первом, втором и третьем дележе соответственно. Тогда по условию задачи

$$N = 13x + 8 = 11y + 3 = 8z + 5, \quad N \leq 500, \quad \text{где } N, x, y, z \in \mathbf{N}.$$

Из уравнения $13x + 8 = 11y + 3$ имеем

$$13x + 5 = 11y \Leftrightarrow 13(x - 3) = 11(y - 4).$$

Числа 13 и 11 взаимно простые, следовательно, $(x - 3)$ делится на 11. Значит, $x = 11t + 3$, где $t \in \mathbf{Z}$, тогда $y = 13t + 4$.

Аналогично,

$$11y + 3 = 8z + 5 \Leftrightarrow 11y = 8z + 2 \Leftrightarrow 11(y - 6) = 8(z - 8).$$

Так как числа 11 и 8 взаимно простые, то $(y - 6)$ делится на 8, т.е. $y = 8n + 6$, $n \in \mathbb{Z}$, следовательно, $z = 11n + 8$.

Используя различные выражения для y , получаем связь между параметрами m и n :

$$13m + 4 = 8n + 6 \Leftrightarrow 13(m - 2) = 8(n - 3).$$

Отсюда $(m - 2):8$, т.е. $m = 8k + 2$, $n = 13k + 3$, где $k \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$y = 13m + 4 = 8 \cdot 13 \cdot k + 30, \quad N = 11y + 3 = 8 \cdot 11 \cdot 13 \cdot k + 333.$$

Условию $N \leq 500$ отвечает лишь значение $k = 0$, так что $N = 333$.

6. $x = -4$ при $a = 1$. *Указание.* После замены $t = x + 4$ получаем аналогичную задачу для уравнения

$$\frac{8}{\pi} \arctg \frac{t}{4} \cdot \log_{\sqrt{17}+4} \left(t + \sqrt{t^2 + 1} \right) + a \sin \left(\pi \frac{t^2 - 80}{32} \right) = a^2 - 2.$$

Обозначим левую часть уравнения через $f(t)$. Нетрудно видеть, что $f(-t) = f(t)$, т.е. $f(t)$ — четная функция. Поэтому, если некоторое значение t_0 является решением нашего уравнения, то ему удовлетворяет и значение $-t_0$. Стало быть, для единственности решения необходимо условие $t_0 = 0$. Из равенства $f(0) = a^2 - 2$ следует, что либо $a = 1$, либо $a = -2$.

При $a = 1$ уравнение принимает вид

$$\frac{8}{\pi} \arctg \frac{t}{4} \cdot \log_{\sqrt{17}+4} \left(t + \sqrt{t^2 + 1} \right) = -1 - \sin \left(\pi \frac{t^2 - 80}{32} \right).$$

Если $t \neq 0$, левая часть этого уравнения положительна, в то время как правая часть не превосходит нуля. Поэтому в данном случае $t = 0$ — единственное решение. Ему соответствует значение $x = -4$.

При $a = -2$ получаем уравнение

$$\frac{8}{\pi} \arctg \frac{t}{4} \cdot \log_{\sqrt{17}+4} \left(t + \sqrt{t^2 + 1} \right) = 2 - 2 \sin \left(\pi \frac{t^2 - 80}{32} \right),$$

имеющее, кроме $t = 0$, еще и решения $t = \pm 4$, что проверяется непосредственно.

7. Утверждения б) и в) верны всегда, а утверждения а) и г) — не всегда. Пусть $p_i > 0$ — прибыль i -го из прибыльных предприятий, $i = 1, \dots, n$, $n \geq 1$; $u_j \leq 0$ — убыток j -го из неприбыльных предприятий, $j = 1, \dots, m$, $m \geq 1$. Обозначим $P = p_1 + \dots + p_n$, $U = |u_1| + \dots + |u_m|$. Тогда по условию задачи

$$\frac{P - U}{n + m} = 2 \Leftrightarrow P = U + 2(n + m). \quad (*)$$

Проанализируем теперь утверждения из условия задачи.

а) Утверждение верно не всегда. В самом деле, если $p_1 = p_2 = 5$, $p_3 = 6$, $u_1 = u_2 = -3$, то выполнено равенство $(*)$ и при этом $n = 3 > m = 2$. Возможна и обратная ситуация, когда количество прибыльных предприятий меньше: $n = 2 < m = 3$ при $p_1 = p_2 = 8$, $u_1 = u_2 = u_3 = -2$,

б) Утверждение всегда верно, так как при $n \geq 1$, $m \geq 1$, $U > 0$ из $(*)$ следует $P > 2(n + m) \geq 2 \cdot 2 = 4$.

в) Предположим, что наибольшая величина прибыли среди всех предприятий не превышает 2 млн у.е., т.е. $p_i \leq 2$ при любом i . Тогда $P \leq 2n$, что противоречит неравенству $P = U + 2(n + m) > 2n$. Итак, утверждение в) всегда верно.

г) Пример ситуации, когда средняя прибыль по прибыльным предприятиям больше абсолютной величины среднего убытка по убыточным предприятиям: $n = 2$, $p_1 = p_2 = 8$, $m = 3$, $u_1 = u_2 = u_3 = -2$,

$8 = \frac{P}{n} > \frac{U}{m} = 2$. Пример обратной ситуации: $n = 3$, $p_1 = p_2 = 20$,

$p_3 = 10$, $m = 2$, $u_1 = u_2 = -20$, $\frac{50}{3} = \frac{P}{n} < \frac{U}{m} = 20$.

Вариант 10

1. 2. $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup [3; +\infty)$.

3. $(-8; 6); \left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}\right)$. *Указание.* Заметим, что

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 12 + x - 10y, \\ x^2 + 3xy + 2y^2 = 16 + 6x + 4y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y + 3)(x + 2y - 4) = 0, \\ (x + y + 2)(x + 2y - 8) = 0. \end{cases}$$

Далее остается рассмотреть четыре возможных варианта получающихся линейных систем. Одна из них, очевидно, несовместна.

4. а) Нет; б) да; в) да; г) нет. При освоении n -го вида новой продукции ($n \in \mathbb{N}$) дополнительные расходы, согласно условию, составляют $13 + 7(n - 1) = 6 + 7n$, поэтому величина прибыли равна $75 - (6 + 7n) = 69 - 7n$. Прибыль положительна, если $69 - 7n > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n < \frac{69}{7}. \text{ Значит, } 1 \leq n \leq 9.$$

Итак, $n = 9$ — максимально возможное число видов новой продукции, которые еще будут приносить прибыль. Тогда возможный наибольший прирост прибыли (при освоении 9 видов продукции) составляет

$$\sum_{n=1}^9 (69 - 7n) = 306.$$

А наименьший возможный прирост прибыли (при освоении только первого вида) составит $(69 - 7) = 62$.

Анализируя полученные результаты, получаем ответы.

5. $-\frac{8}{5}; -\frac{24}{23}; \frac{8}{7}; \frac{24}{17}$. *Указание.* Решение логарифмического неравенства – объединение двух промежутков $(-2; -1)$ и $[1; 2]$. После замены $\alpha = \frac{2\pi}{x}$ и преобразований тригонометрическое уравнение приводится к виду $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\left(3\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right) = 0$, откуда $\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\alpha = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$, где $k, n \in \mathbb{Z}$. Осталось выяснить, при каких k и n выполняются неравенства $-2\pi < \alpha < -\pi$ и $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$, а затем найти соответствующие значения x .

6. $\frac{47\sqrt{3}}{8}$. *Указание.* Так как $ACDE$ – трапеция, вписанная в окружность радиуса R , то $AE = CD$ и $2R = \sqrt{19}$. По теореме косинусов из треугольника CED получим, что $CE = 7/2$. А по теореме косинусов из треугольника ACE получим, что $AC = \sqrt{3}$ или $AC = \frac{5\sqrt{3}}{2}$. Если $AC = \sqrt{3}$, то трапеция $ACDE$ – прямоугольник, что невозможно ($CE \neq 2R$). Итак, $AC = \frac{5\sqrt{3}}{2}$. Дальнейшее ясно:

$$S_{ABCDE} = S_{CED} + S_{ACE} + S_{ABC}.$$

7. $\left(-4 - \sqrt{6}; -\frac{9}{2}\right) \cup \left(-3; \frac{-8 + \sqrt{22}}{3}\right) \cup [5; 7)$. *Указание.* Пусть $a = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$ и $b = 2|x + 2|$, где $a, b \geq 0$. Тогда исходное неравенство записывается в форме

$$\frac{a+4}{a^2-16} < \frac{b+5}{b^2-25} \Leftrightarrow \frac{1}{a-4} < \frac{1}{b-5}.$$

Отдельно исследуйте случаи

- 1) $a - 4 < 0, b > 0$;
- 2) $a - 4 < 0, b < 0$;
- 3) $a - 4 > 0, b > 0$;
- 4) $a - 4 > 0, b < 0$

и решите в каждом из этих случаев полученные неравенства.

8. $\frac{\sqrt{21}+1}{2}; \frac{5-\sqrt{13}}{2}$. *Указание.* Центры O_1 и O_2 вписанной с радиусом r и описанной с радиусом R сфер правильной треугольной пирамиды $SABC$ лежат на прямой, перпендикулярной плоскости ABC и проходящей через центр H треугольника ABC . Поэтому искомое расстояние $O_1O_2 = |SO_1 - SO_2| = |R - h + r|$, где h – высота пирамиды. Пусть

d – расстояние от O_2 до плоскости ABC .

Ясно, что $d = \sqrt{R^2 - HB^2} = 2$, а $h = 4 + 2 = 6$, если O_2 лежит внутри пирамиды, и $h = 4 - 2 = 2$, если O_2 лежит вне пирамиды, т.е. искомое расстояние равно $|r - 2|$ или $r + 2$ в зависимости от расположения центра описанной сферы.

Если a – сторона основания, то

$r = \frac{ah}{a + \sqrt{12h^2 + a^2}}$, что следует из рас-

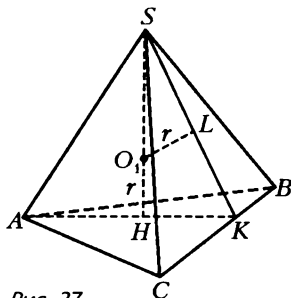


Рис. 27

смотрения подобных треугольников O_1LS и SKH (рис.27):

$$\frac{h-r}{r} = \frac{SK}{HK} = \frac{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}}{\frac{a}{2\sqrt{3}}}.$$

Отсюда находим r , а затем и O_1O_2 для каждого из двух возможных случаев.

Вариант 11

1. $-6 < x < 0, 0 < x < 3$.

2. 2.

3. 70° .

4. 9, $\sqrt{3}$. **Указание.** Прологарифмируйте уравнение по основанию 3 и выполните замену $t = \log_3 x$.

5. 30%; 30. **Указание.** Пусть $k\%$ опрошенных любят зиму, а $n\%$ лето. Тогда $0,9k = 0,72n$, $10 + n + (1 - 0,9)k = 100$, откуда $k = \frac{200}{3}$, $n = \frac{250}{3}$

и только один из сезонов любят $0,1k + 0,28n = 0,3$, т.е. 30%. Но число опрошенных должно быть кратным как 10, так и 3. Очевидно, что 30 удовлетворяет условию.

6. $x = 3, y \geq -3; y = 1, x \geq -1$. Рисунок изготовьте самостоятельно. **Указание.** После возведения в квадрат и тождественных преобразований получаем равносильное уравнение

$$\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{y+3} = 2\sqrt{x+y},$$

в свою очередь равносильное системе

$$\begin{cases} x+y \geq 0, \\ y+3 \geq 0, \\ (x+3)(y-1) = 0. \end{cases}$$

7. $\min a = \frac{1}{2}$, $\max a = 1/\cos \frac{\pi}{9}$. **Указание.** При $a \leq 0$ имеем

$$\arcsin ax \leq \frac{\pi}{2} < 3 \arccos x + \frac{\pi}{6}, \text{ если } x < 0, \text{ и } \arcsin ax \leq 0 < 3 \arccos x + \frac{\pi}{6}$$

при $x \geq 0$, так что в этом случае корней нет.

При $a > 0$ графики функций $y = \arcsin ax$ и $y = 3 \arccos x + \frac{\pi}{6}$ имеют общую точку тогда и только тогда, когда ее имеют графики обратных функций $x = \frac{\sin y}{a}$ и $x = \cos \frac{y - \frac{\pi}{6}}{3}$ на отрезке $\frac{\pi}{6} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, на котором первая функция возрастает, а вторая — убывает. Поэтому для существования точки пересечения необходимо и достаточно выполнение системы неравенств для значений этих функций на концах отрезка:

$$\begin{cases} \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{a} \geq \cos \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}}{3}, \\ \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{a} \leq \cos \frac{\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{\cos \frac{\pi}{9}}.$$

Вариант 12

1. $(0; 1]$. 2. 100 тыс. руб., 50 тыс. руб.

3. $\sqrt{5 + 3\sqrt{2}}$. Указание. Воспользуйтесь тем, что

$$\angle AOB = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ACB = 150^\circ.$$

4. 105. Указание. Если $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$, то из условия следует

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 74, \\ b^2 + c^2 = 34, \\ a^2 + b^2 = 58. \end{cases}$$

Эту систему легко решить, заметив, что $a^2 + b^2 + c^2 = 83$.

5. 3. Указание. Область определения неравенства: $3 \leq x \leq 4$. Перепишем его так:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x - 3} \leq 2 + \sqrt{6x - x^2 - 8} = g(x).$$

Функция $f(x)$ возрастает при $x \geq 3$ и, следовательно, $f(x) \geq f(3) = 3$ при $3 \leq x \leq 4$. Функция $g(x)$ убывает при $x \geq 3$ и потому $g(x) \leq g(3) = 3$.

6. $(\log_3 2; \log_2 3); (1; 2)$. Указание. Введите новые переменные $u = 3^x$, $v = 2^y$ (где $u, v > 0$).

7. $\arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $\arccos(\sqrt{2}-1)$. Указание. Раскрывая скобки в левой части второго уравнения, преобразуем данную систему:

$$\begin{cases} \left| \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \right| + \left| \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}x \right| = \sin a, \\ x^2 + y^2 = \cos a. \end{cases}$$

Пусть

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \\ v = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y. \end{cases}$$

Тогда каждой паре $(x; y)$ отвечает единственная пара $(u; v)$ и наоборот. Заметим также, что $u^2 + v^2 = x^2 + y^2$. Таким образом, в новых переменных система принимает вид

$$\begin{cases} |u| + |v| = \sin a, \\ u^2 + v^2 = \cos a. \end{cases}$$

При $a \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ правые части уравнений неотрицательны, а сами уравнения описывают: первое – квадрат с диагональю длины $2\sin a$, второе – окружность радиуса $\sqrt{\cos a}$ с центром в начале координат. При $a = 0$ квадрат вырождается в точку, а при $a = \frac{\pi}{2}$ окружность превращается в точку.

Рассматривая взаимное расположение квадрата и окружности, легко видеть, что система имеет ровно четыре различных решения в двух случаях.

а) Квадрат вписан в окружность (рис.28). В этом случае

$$\sin a = \sqrt{\cos a} \Leftrightarrow \cos^2 a + \cos a - 1 = 0,$$

откуда $\cos a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

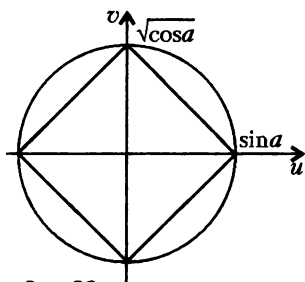


Рис. 28

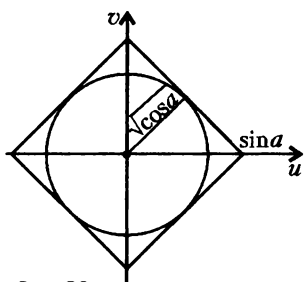


Рис. 29

б) Окружность вписана в квадрат (рис.29). Тогда

$$\frac{\sin a}{\sqrt{2}} = \sqrt{\cos a} \Leftrightarrow \cos^2 a + 2 \cos a - 1 = 0, \text{ т.е. } \cos a = -1 + \sqrt{2}.$$

Осталось выписать решения. Это значения $a = \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и $a = \arccos(\sqrt{2}-1)$.

Вариант 13

1. 6 км/ч. 2. $2\pi k, -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

3. Утверждения б) и г) справедливы, утверждения а), в) и д) ошибочны. Обозначим через p и q соответственно количество прибыльных и убыточных недель в финансовой деятельности фирмы ($p, q \in \mathbb{Z}$, $0 \leq p, q \leq 52$). Пусть v_i (млн руб.) – величина баланса фирмы по итогам i -й недели, S^+ и S^- – суммарный баланс по прибыльным неделям и абсолютная величина суммарного баланса по убыточным неделям соответственно. Тогда справедливы соотношения

$$S^+ = \sum_{v_i > 0} v_i, \quad S^- = \sum_{v_i < 0} |v_i|, \quad S^+ - S^- = 26.$$

Проанализируем далее предложенные в условии задачи утверждения.

а) Утверждение неверно, что следует из примера

$$q = 51, p = 1; v_1 = \dots = v_{51} = -1, v_{52} = 77.$$

б) Верно, так как из уравнения $S^+ - S^- = 26$ следует $S^+ > S^-$.

в) Неверно, как показывает пример

$$v_1 = -26, \quad v_2 = 2, \quad v_3 = \dots = v_{52} = 1.$$

г) Утверждение справедливо. В самом деле, из предположения, что средняя величина недельного баланса по прибыльным неделям составляет менее полумиллиона рублей, т.е. $\frac{S^+}{p} < \frac{1}{2}$, следует неравенство

$$S^+ < \frac{p}{2} \leq 26, \text{ противоречащее условию } S^+ = 26 + S^- \geq 26.$$

д) Утверждение ошибочно, поскольку возможна ситуация

$$v_1 = \dots = v_{52} = \frac{1}{2}, \quad S^+ = 52 \cdot \frac{1}{2} = 26.$$

4. $\frac{1}{2}; \frac{2\sqrt{2}-3}{2}$.

5. $25(2 - \sqrt{2})$. *Указание.* Заметим сначала, что наиболее удаленная от вершины A квадрата $ABCD$ точка C находится на расстоянии, меньшем минимальной по длине стороны треугольника, о котором идет

речь в условии задачи: $AC = 5\sqrt{2} < 10$. Поэтому площадь общей части квадрата и треугольника та же, что высекается из квадрата внутренностью угла EAF величиной $\frac{\pi}{4}$ (рис.30–32).

а) Пусть биссектриса угла EAF совпадает с направлением диагонали AC квадрата (см. рис. 30). Тогда площадь общей части равна

$$S = 2S_{AEC} = 25(2 - \sqrt{2}).$$

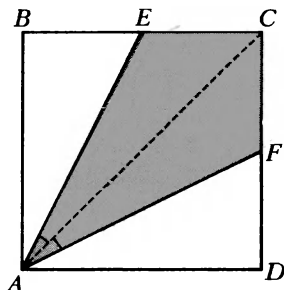


Рис. 30

Ниже показано, что именно в этой ситуации и получается искомый максимум площади.

б) Если луч AE образует угол величиной α , $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{8}$, с направлением стороны AB , то $\angle CAF = \alpha$, $\angle EAC = \frac{\pi}{4} - \alpha$ (см. рис.31). Покажем, что $S_{AECF} < S = S_{AE'CF'}$ (здесь $AE'CF'$ — расположение фигуры в случае а)). Действительно, фигура $AECF$ получается из $AE'CF'$ изъятием части AFF' и добавлением AEE' . При этом $\angle FAF' = \angle EAE' = \frac{\pi}{8} - \alpha$, $AE' = AF'$, $AE < AF$ (так как $BE < DF$). Следовательно,

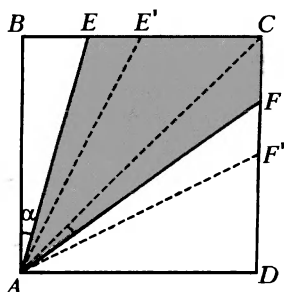


Рис. 31

$$S_{AEE'} = \frac{1}{2} AE \cdot AE' \cdot \sin \angle EAE' < \frac{1}{2} AF \cdot AF' \cdot \sin \angle FAF' = S_{AFF'},$$

что и доказывает утверждение.

в) Очевидно, что в случае взаимного расположения угла и квадрата, представленном на рисунке 32, площадь их общей части еще меньше.

6. $3\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$. Указание. После замены $t = x^{\log_3 x}$, где $t > 0$, исходное уравнение записывается в виде

$$t^2 - 3t - 54 = 0.$$

7. 37 школьников. Исходные данные задачи в схематическом виде представлены на рисунке 33, где множества И, Г и М изображают группы школьников,

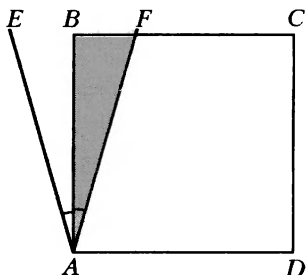


Рис. 32

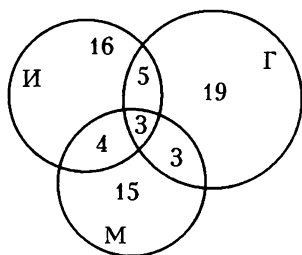


Рис. 33

имеющих пятерки по истории, географии и математике соответственно. Поскольку количество школьников, получивших хотя бы одну пятерку по указанным предметам, равно

$$16 + 19 + 15 + 4 + 5 + 3 + 3 = 65,$$

то искомое число школьников составляет $102 - 65 = 37$.

8. $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$. После замены $t = \cos 3x$,

где $|t| \leq 1$, данное уравнение принимает вид

$$2t^2 - (2a + 1)t + (a - 1) = 0.$$

Условие существования ровно шести корней исходного уравнения, отвечающих требованию $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, означает, что это уравнение имеет два корня t_1, t_2 , причем один из них удовлетворяет неравенству $0 \leq t_1 < 1$, а для другого справедливы ограничения: либо $t_2 = 1$, либо $-1 < t_2 < 0$ (рис. 34).

Обозначив через $f(t)$ левую часть уравнения, рассмотрим сначала случай

Рис. 34

$t_2 = 1$. При этом

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

Тогда получаем

$$2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -\frac{1}{2} \\ t_2 = 1, \end{cases}$$

т.е. корень t_1 не попадает в нужный промежуток, поэтому число $a = 0$ не является решением задачи.

Итак, остается ситуация $0 \leq t_1 < 1$ и $-1 < t_2 < 0$. Этот случай равносильен выполнению системы неравенств

$$\begin{cases} f(-1) > 0, \\ f(0) \leq 0, \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < a < 0.$$

9. Да, это выгодно покупателю. Пусть c и d — длины, которые имеют плечи рычага в весах ($c \neq d$), а m_1 и m_2 (кг) — массы конфет при первом и втором взвешивании соответственно. Тогда, используя условие

равновесия для рычажных весов, получаем

$$\begin{cases} c \cdot m_1 = d \cdot 1, \\ c \cdot 1 = d \cdot m_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{d}{c}, \\ m_2 = \frac{c}{d}. \end{cases}$$

Отсюда $m_1 + m_2 = \frac{d}{c} + \frac{c}{d} > 2$ как сумма двух неравных положительных взаимно обратных чисел.

ФИЗИКА

Физический факультет

1. При решении задачи будем считать, что точка опоры O и балка покоятся относительно инерциальной системы отсчета и что влиянием воздуха на движущиеся части системы, как и силами трения, действующими на блоки со стороны их осей, можно пренебречь. Кроме того, будем считать блоки идеальными цилиндрами, вращающимися вокруг своих геометрических осей. По условию задачи блоки и нити невесомы. Поэтому, с учетом сделанных предположений, можно утверждать, что модули сил натяжения нити, действующих на первый и второй грузы, одинаковы, обозначим их F_1 , и что модули ускорений первого и второго грузов одинаковы, ускорения направлены вертикально, но в противоположные стороны. Обозначим проекцию ускорения первого груза на вектор ускорения свободного падения \vec{g} через a_1 . Тогда уравнения движения первого и второго грузов в проекции на выбранное направление можно представить в виде

$$m_1 a_1 = m_1 g - F_1, \quad -m_2 a_1 = m_2 g - F_1.$$

Следовательно, $F_1 = 2m_1 m_2 g / (m_1 + m_2)$. Аналогичным образом можно показать, что при сделанных предположениях модуль силы натяжения нити, связывающей третий и четвертый грузы, равен $F_2 = 2m_3 m_4 g / (m_3 + m_4)$. В таком случае первый блок действует на балку с направленной вертикально вниз силой, модуль которой равен $2F_1$, а на другой конец этой балки действует направленная вертикально вниз сила, модуль которой равен $2F_2$. На балку действует и сила тяжести Mg , приложенная к ее середине.

Поскольку балка находится в равновесии, по правилу моментов относительно точки опоры O должно иметь место соотношение

$$2F_1 L_1 = 2F_2 (L - L_1) + Mg(0,5L - L_1).$$

Подставляя в это соотношение полученные ранее значения F_1 и F_2 , находим ответ:

$$L_1 = L \frac{8m_3 m_4 + M(m_3 + m_4)}{8m_3 m_4 + 2M(m_3 + m_4) + 8m_1 m_2(m_3 + m_4)/(m_1 + m_2)}.$$

2. Будем решать задачу, считая ось X осью инерциальной лабораторной системы отсчета, кроме того, пренебрегая влиянием воздуха на шайбу и полагая модуль силы сухого трения скольжения, действующей на шайбу со стороны плоскости, равным максимальному значению силы сухого трения покоя. При выполнении сделанных предположений на основании закона Кулона–Амонтона можно утверждать, что модуль силы сухого трения скольжения равен $F_{\text{тр}}(x) = N\mu(x)$, где N – модуль нормальной составляющей силы реакции, действующей на шайбу со стороны плоскости. Поскольку шайба движется по горизонтальной плоскости, $N = mg$, где m – масса шайбы. Таким образом,

$$F_{\text{тр}}(x) = mg\mu(x).$$

Под действием силы трения шайба замедляет свое движение и в некоторый момент останавливается. Согласно теореме об изменении кинетической энергии, максимальная работа шайбы против сил трения равна $A = 0,5mv_0^2$. С другой стороны, работу силы трения можно вычислить, определив площадь фигуры под графиком функции $\mu(x)$. Учитывая, что площадь указанной фигуры

$$S = 0,5\mu_0 L + 0,5(1 + 0,5)\mu_0 L = 1,25\mu_0 L$$

в mg раз меньше работы силы трения при заданном перемещении шайбы, находим модуль искомой скорости:

$$v_0 = \sqrt{2,5\mu_0 g L}.$$

3. Пусть L – длина всей свечи, а h – длина ее погруженной в воду части в момент времени t . Полагая, что свеча движется практически без ускорения относительно стакана, а он покоится относительно земли, можно утверждать, что сумма сил гидростатического давления воды на свечу уравнивает силу тяжести свечи: $\rho_n s L = \rho_b s h$. За время Δt длина свечи уменьшится на $\Delta L = u \Delta t$, а нижний торец свечи окажется на глубине $\Delta h = \rho_n \Delta L / \rho_b$, т.е. нижний торец свечи движется относительно верхнего уровня воды в стакане со скоростью $\Delta h / \Delta t = u \rho_n / \rho_b$. Поскольку объем воды в стакане не изменяется, то за время Δt свеча поднимется относительно стакана на высоту Δx , а уровень воды в стакане понизится на Δy , причем $s \Delta x = (S - s) \Delta y = (S - s)(h - (h - \Delta h) - \Delta x)$. Из этого соотношения следует, что $\Delta y = s \Delta h / S$. Учитывая, что $v = \Delta y / \Delta t$, получаем, что модуль искомой скорости равен

$$v = \frac{s \Delta h}{S \Delta t} = \frac{s \rho_n}{S \rho_b} u.$$

4. При решении задачи будем считать, что система отсчета, неподвижная относительно поверхности планеты в месте проведения опыта, является инерциальной. Поскольку сопротивлением движению груза следует пренебречь, на движущийся груз действуют только сила тяже-

сти и сила натяжения нити. На рисунке 35,а показаны силы, действующие на совершающий колебания в вертикальной плоскости груз в тот момент времени, когда нить подвеса отклонена от вертикали на угол α , а модуль скорости груза равен $v(\alpha)$. Согласно закону сохранения механической энергии, модуль скорости груза $v(\alpha)$ удовлетворяет соотношению

$$0,5mv^2(\alpha) = mgL(\cos \alpha - \cos \alpha_0),$$

где m – масса груза. Поскольку центростремительное ускорение груза равно $v^2(\alpha)/L$, то, согласно второму закону Ньютона, модуль $F(\alpha)$ силы натяжения нити должен удовлетворять уравнению

$$\frac{mv^2(\alpha)}{L} = F(\alpha) - mg \cos \alpha.$$

В момент прохождения грузом положения равновесия ($\alpha = 0$) модуль силы натяжения достигает максимума и становится равным $F_{\max} = F(0) = (3 - 2 \cos \alpha_0)mg$. При максимальном же отклонении нити от вертикали модуль силы натяжения минимален и равен $F_{\min} = F(\alpha_0) = mg \cos \alpha_0$. Следовательно,

$$n = \frac{F_{\max}}{F_{\min}} = \frac{3}{\cos \alpha_0} - 2, \text{ а потому } \cos \alpha_0 = \frac{3}{n+2}.$$

При движении груза по окружности радиусом $R = L \sin \alpha_0$ его центростремительное ускорение равно $a = \omega^2 R = (2\pi/T)^2 L \sin \alpha_0$. В обозначениях, приведенных на рисунке 35,б, модуль составляющей силы натяжения нити, обеспечивающей центростремительное ускорение груза, равен $F_{\text{кр}} \sin \alpha_0$. Поскольку груз при движении по окружности не смещается по вертикали, то $F_{\text{кр}} \cos \alpha_0 = mg$. На основании второго закона Ньютона можно утверждать, что $g = (2\pi/T)^2 L \cos \alpha_0$. Подставляя в это выражение ранее найденное значение $\cos \alpha_0$, находим искомое значение модуля ускорения свободного падения в месте проведения опыта:

$$g = \frac{12\pi^2 L}{(n+2)T^2}.$$

5. При решении задачи будем, как обычно, считать трубку покоящейся относительно поверхности земли в месте проведения опыта. Пусть над поверхностью воды выступает часть цилиндра высотой x , тогда в жидкости находится часть цилиндра длиной $h - x$. Следовательно, давление на горизонтальном уровне, совпадающем с нижним осно-

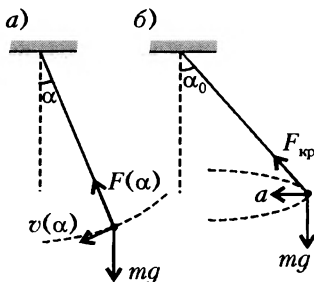


Рис. 35

ванием цилиндра, равно $p + (h - x)\rho_0 g$, где p — давление воздуха над поверхностью воды в том колене, в котором находится цилиндр. При этом давление, создаваемое нижним основанием цилиндра, равно $p + \rho g h$. Поскольку цилиндр покоится относительно воды, указанные давления должны быть равны, а потому

$$\rho h = (h - x)\rho_0.$$

Чтобы цилиндр коснулся крышки, объем воздуха в левом колене необходимо уменьшить до величины $(0,25d^2 - r^2)\pi x$. Будем считать воздух идеальным газом. Тогда давление p воздуха в правом колене, согласно уравнению Менделеева-Клапейрона, можно вычислить по формуле

$$(0,25(a + x)d^2 - r^2 x)p_0 = (p - 2\rho_0 g a)(0,25d^2 - r^2)x.$$

Здесь, было учтено, что температура в трубке остается постоянной, разность уровней воды в коленях в момент касания цилиндром крышки равна $2a$, а до закрывания колен трубки крышками давление над поверхностью воды в обоих коленях было равно атмосферному давлению p_0 . Кроме того, как обычно, мы пренебрегли сжимаемостью воды и цилиндра, а также испарением воды после закрывания крышек.

Требуемое увеличение давления воздуха в правом колене составляет $\Delta p = p - p_0$. Из полученных ранее выражений следует, что

$$\Delta p = \rho_0 a \left(2g + \frac{p_0 d^2}{(d^2 - 4r^2)(\rho_0 - \rho)h} \right) \approx 30 \text{ кПа}.$$

6. Внутренняя энергия моля идеального одноатомного газа определяется только кинетической энергией хаотического (теплового) движения его атомов и равна $W = 1,5RT$, где R — универсальная газовая постоянная, а T — абсолютная температура газа. Следовательно, температура данного газа в точке 1 равна $T_1 = W_0/(1,5R)$. Поскольку идеальный газ подчиняется уравнению Менделеева-Клапейрона, его объем в этой точке равен $V_1 = W_0/(1,5p_0)$. На участке 1-2 объем газа остается неизменным, так как давление газа растет пропорционально его внутренней энергии, поэтому в точке 2 температура газа равна $T_2 = W_0/(0,75R)$. В точке 3 температура газа и его объем равны $T_3 = 4W_0/(1,5R)$ и $V_3 = 4W_0/(3p_0)$ соответственно. Поскольку на участке 3-4 объем газа не изменяется, газ за цикл совершает работу

$$A = p_0(V_3 - V_1) = \frac{W_0}{1,5}.$$

Газ получает тепло только на участках 1-2 и 2-3, так как на участках 3-4 и 4-1 внутренняя энергия газа уменьшается и над газом совершается работа. Молярная теплоемкость идеального одноатомного газа при

изохорическом процессе – участок 1–2 – равна $1,5R$, а при изобарическом процессе – участок 2–3 – молярная теплоемкость равна $2,5R$. Следовательно, полученное газом количество теплоты равно

$$Q = 1,5R(T_2 - T_1) + 2,5R(T_3 - T_2) = \frac{13W_0}{3}.$$

По определению КПД цикла равен

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{2}{13} \approx 15,4\%.$$

7. Будем решать задачу, считая, что до касания неподвижной пластины полюсом источника заряд каждой из пластин был равен нулю, обе пластины покоились относительно лабораторной системы отсчета и что эта система является инерциальной. По условию задачи в результате подключения источника к пластинам конденсатора между ними установилась разность потенциалов U . Поскольку конденсатор плоский, возникшее в конденсаторе электростатическое поле однородное, модули зарядов пластин равны друг другу, а распределение зарядов по пластинам равномерное. Следовательно, напряженность возникшего между пластинами электростатического поля равна $E = U/L$. Как известно, напряженность E поля между пластинами плоского конденсатора, заряды пластин которого равны по модулю и противоположны по знаку, равна удвоенной напряженности E_1 поля, создаваемого зарядами каждой из его пластин. Напряженность же поля, создаваемого равномерно заряженной с поверхностной плотностью σ плоскостью, равна $E_1 = \sigma/(2\epsilon_0)$, где ϵ_0 – электрическая постоянная. Значит, модуль плотности заряда на каждой из пластин конденсатора стал равен $\sigma = 2\epsilon_0 E_1$, и между пластинами возникла сила взаимного притяжения, равная $F = \sigma S E_1$.

В результате заряда конденсатора верхняя пластина начнет совершать колебания. Если пренебречь сопротивлением движению этой пластины со стороны воздуха и потерями энергии на излучение, то на основании закона сохранения энергии при выполнении сделанных предположений можно показать, что амплитуда этих колебаний равна $A = F/k$. При этом максимальное смещение верхней пластины от того положения, которое она занимала до зарядки конденсатора, будет равно $2A$, если, конечно, при своем движении она не коснется нижней пластины. Таким образом, касания между пластинами не произойдет, если

$$L > 2A = \frac{\epsilon_0 S U^2}{k L^2}, \text{ или } L > \sqrt[3]{\frac{\epsilon_0 S U^2}{k}}.$$

8. По условию задачи внутреннее сопротивление вольтметров во много раз превышает сопротивление резисторов. Поэтому силами токов,

текущих через вольтметры, следует пренебречь по сравнению с силами токов, текущих через резисторы. Так как $R_1 = R_3$, а $R_2 = R_4 + R_5$, можно считать, что напряжение U_{AC} между точками A и C схемы равно нулю. Поэтому напряжения на первом и втором вольтметрах равны по модулю, но противоположны по знаку, т.е. имеет место равенство $U_1 = U_2$. Аналогично, можно утверждать, что напряжение U_{CD} на резисторе R_4 равно сумме напряжений на втором и третьем вольтметрах: $U_{CD} = U_2 + U_3$, а сила тока, текущего через резисторы R_3 , R_4 и R_5 , согласно закону Ома, равна $I = U_4 / (R_3 + R_4 + R_5)$. Отсюда $U_{CD} = IR_4 = U_2 + U_3 = 3$ В. Поскольку сумма модулей сил токов, текущих через первый и второй вольтметры, равна модулю силы тока, текущего через третий вольтметр, и сопротивления всех вольтметров одинаковые, то $U_1 + U_2 = U_3 = 2U_1$. Следовательно, показания первого и второго вольтметров равны $U_1 = U_2 = 1$ В, а показание третьего вольтметра равно $U_3 = 2$ В.

9. По условию задачи проволока неподвижна относительно стены. Будем считать систему отсчета, неподвижную относительно стены, инерциальной. Тогда сила, действующая со стороны проволоки на груз, должна уравновешивать действующую на него силу тяжести mg . Поскольку массой проволоки и силой ее трения о второй гвоздь следует пренебречь, учитывая, что проволока гибкая, можно утверждать, что модуль силы натяжения во всех точках проволоки равен mg .

По условию задачи участок проволоки между гвоздями должен иметь форму дуги окружности радиусом $R = 0,5L$. На этот участок проволоки со стороны магнитного поля действует сила Ампера. Рассмотрим столь малый отрезок Δl этого участка, чтобы его можно считать отрезком прямой. Поскольку вектор индукции магнитного поля направлен горизонтально и перпендикулярно проволоке, то модуль силы Ампера, действующий на этот участок, равен $\Delta F_A = IB\Delta l$. По сделанному выше предположению этот отрезок покоится относительно инерциальной системы отсчета. Следовательно, действие силы Ампера уравновешивается действием на рассматриваемый отрезок сил натяжения со стороны примыкающих к нему соседних частей проволоки. Эти силы направлены перпендикулярно радиусам окружности, проведенным к концам рассматриваемого отрезка, и по модулю равны mg . Если угол, образованный этими радиусами, равен $\Delta\alpha$, то модуль суммы указанных сил натяжения равен $mg\Delta\alpha$. Поскольку $\Delta l = R\Delta\alpha$, то искомая сила тока равна

$$I = \frac{2mg}{BL}.$$

10. При решении задачи будем считать, что все пучки света параксиальные, а изображения стигматичные. Тогда справедлива формула тонкой линзы, и для построения изображений нужно найти точку

пересечения любых двух лучей, ход которых известен, но которые реально могут и не участвовать в построении изображения. При отсутствии линзы L_2 изображение S_1 источника S , создаваемое линзой L_1 , находилось бы на ее главной оптической оси на расстоянии $2F$ за этой линзой, т.е. за линзой L_2 в ее фокальной плоскости (рис.36).

Для построения искомого изображения S_2 удобно использовать луч SA , падающий на линзу L_2 параллельно ее главной оптической оси, и луч SC , который после преломления в линзе L_1 (если линза L_1 достаточно большая) проходит через оптический центр линзы L_2 в точку S_1 . Точка пересечения S_2 этих лучей и является искомым изображением.

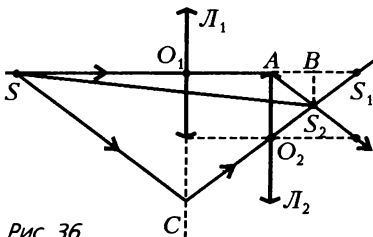


Рис. 36

Пусть длина отрезка AB равна b , а отрезка BS_2 равна h . Треугольники O_2AS_1 и S_2BS_1 подобны. Поскольку $O_2A = H$, а $AS_1 = F$, то $H/h = F/b$. Согласно формуле тонкой линзы, $\frac{1}{b} - \frac{1}{F} = \frac{1}{F}$, откуда $b = 0,5F$, а $h = 0,5H$. Треугольник SBS_2 прямоугольный, в нем $SB = 3F + b$, а $BS_2 = h$. Поэтому искомое расстояние равно

$$SS_2 = \sqrt{(3,5F)^2 + (0,5H)^2}.$$

11. При решении задачи положим, что падающий на дифракционную решетку параллельный пучок света является когерентным. Кроме того, будем считать, что коэффициенты пропускания участков решетки с показателями преломления n_1 и n_2 одинаковы. Одинаковой является и интенсивность света во всех точках падающего на решетку пучка. По определению, в главном фокусе линзы собираются все лучи, падающие на нее параллельно главной оптической оси, причем лучи, прошедшие через участки решетки с одинаковыми показателями преломления, будут приходить в главный фокус линзы в одинаковых фазах. Поэтому в результате интерференции этих пучков в главном фокусе линзы, при отсутствии прозрачных участков с другим показателем преломления, должен был бы наблюдаться нулевой интерференционный максимум. Однако по условию задачи в указанной точке экрана света нет. Это может иметь место только в том случае, когда разность хода лучей, проходящих через соседние прозрачные участки, равна нечетному числу половин длины волны падающего на решетку света, т.е. если выполняется условие

$$|n_2 - n_1|h = 0,5(2k + 1)\lambda, \text{ где } k = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно, искомая толщина соседних прозрачных участков пластинки равна

$$h = \frac{0,5(2k+1)\lambda}{|n_2 - n_1|}, \text{ где } k = 0, 1, 2, \dots$$

Факультет вычислительной математики и кибернетики

$$1. a_A = \sqrt{a^2 + \left(a + \frac{v^2}{R}\right)^2}, \quad a_B = \sqrt{a^2 + \left(a - \frac{v^2}{R}\right)^2}.$$

$$2. T = \frac{(m_1 - m_2)g}{2}. \quad 3. T = mg \sin \alpha + ma_0(1 - \cos \alpha).$$

$$4. v_{\max} = \sqrt{\frac{2\mu g \alpha R}{\sqrt{4\alpha^2 + 1}}} = \sqrt{\frac{\mu g R}{\sqrt{(3/\pi)^2 + 1}}} \approx 14,7 \text{ м/с}.$$

$$5. Q = \frac{3p^2}{16m}. \quad 6. s = \frac{2mv_0}{M+m} \left(\sqrt{\frac{2H}{g}} - \frac{L}{v_0} \right) = 8 \text{ см}.$$

$$7. h = \sqrt{\frac{m\sqrt{3}}{\rho b}}, \text{ ответ имеет смысл при } m \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \rho a^2 b.$$

$$8. \tau = \frac{\pi}{3\sqrt{\alpha g}}. \quad 9. \bar{z} = \pi R^2 v \frac{p}{kT} \approx 1,5 \cdot 10^{24} \text{ с}^{-1}.$$

$$10. \eta = \frac{A}{A + 2\nu R(T_3 - T_1)} \cdot 100\% \approx 7,4\%.$$

$$11. h = h_0 - \frac{100\% Q(\rho_b - \rho_l)}{\eta S \lambda \rho_b \rho_l} \approx 19 \text{ см}.$$

$$12. t_2 = \frac{t_1^2 + (t - 2t_1)t_0}{t - t_0} = 22,5 \text{ }^\circ\text{C}.$$

13. Ток внутри источника направлен от положительной его клеммы к отрицательной и равен $I = \sqrt{S} \frac{\epsilon_0 \epsilon}{d} (\epsilon - 1) v_0$.

$$14. Q = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)\epsilon^2. \quad 15. \epsilon = \frac{nU}{n-1} = 3,5 \text{ В}.$$

$$16. \Delta t = \sqrt{n-1} \frac{BR}{E}. \quad 17. \bar{F} = \frac{LCI_0^2}{4S\epsilon_0}.$$

$$18. l = \frac{(2b(d-F) - dF)^2}{(d-F)(2b(d-F) - 2dF + F^2)} = 40 \text{ см}.$$

$$19. \theta = \frac{l'}{d'} = \frac{lF_1}{(d-F_1)F_2 - F_1^2} = 0,02. \quad 20. l_2 = l_1 \frac{n_1(n_2-1)}{n_2(n_1-1)} \approx 4 \text{ мм}.$$

Вариант 1

$$3. \mathcal{E}_{si} = L \frac{\Delta I}{\Delta t} = 2 \text{ мГн} \frac{10 \text{ А}}{1 \text{ с}} = 20 \text{ мВ} . \quad 4. M = \frac{gR^2}{G} \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ кг} .$$

$$5. R_2 = (\sqrt{n} - 1)(R_1 + r) = 30 \text{ Ом} . \quad 6. k = \frac{1}{3} .$$

$$7. A_{\text{тр}} = mg(H + h) - \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g H = -0,2 \text{ Дж} .$$

$$8. A = \frac{2}{3} \left(U_1 \left(\frac{V_2}{V_1} - 1 \right) + U_3 \left(\frac{V_1}{V_2} - 1 \right) \right) = 2,5 \text{ кДж} .$$

$$9. s = \frac{2v_0^2 \sin \alpha}{g \cos^2 \alpha} .$$

$$10. P = mg + \frac{\epsilon_0 S \mathcal{E}^2}{2d^2} = 5,5 \cdot 10^{-2} \text{ Н} .$$

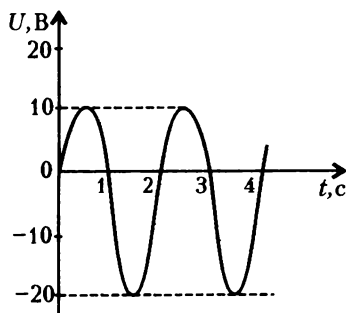


Рис. 37

Вариант 2

$$3. R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} . \quad 4. \text{ См. рис.37} .$$

$$5. k = 4 .$$

$$6. v_1 = \sqrt{4gh - v_0^2} \approx 1,4 \text{ м/с} .$$

$$7. h = \frac{\lambda \rho H}{\rho_0 (t_1 - t_0)} = 1 \text{ м} .$$

$$8. \Delta h = \frac{2r^3}{3R^2} \approx 0,8 \text{ см} . \quad 9. \eta = \frac{P}{IS} \cdot 100\% \approx 1,4\% .$$

$$10. A = \frac{1}{dD - 1} \sqrt{\frac{2W}{k}} = 2 \text{ см} .$$

Вариант 3

$$3. R = \frac{3}{4} r = 1,5 \text{ Ом} . \quad 4. \text{ На участках } 1-2 \text{ и } 2-3 .$$

$$5. \Gamma = \frac{n}{n+1} = \frac{2}{3} . \quad 6. v_0 = \sqrt{2g \left(h + \frac{g(\Delta t)^2}{8} \right)} = 20 \text{ м/с} .$$

$$7. T_2 = \frac{2M_1 M_2 g + m M_2 g}{m + M_1 + M_2} \approx 43 \text{ Н} . \quad 8. h = \frac{R}{2} \sqrt{n^2 - 1} \approx 0,8 \text{ м} .$$

$$9. n = \frac{T_1}{2T_2} \left(k - \frac{1}{k} \right) + \sqrt{\frac{T_1^2}{4T_2^2} \left(k - \frac{1}{k} \right)^2 + 1} .$$

$$10. Q = \frac{CU^2 R_2^2 R_3}{2(R_2 + R_3)(R_2 R_3 + R_1 R_2 + R_1 R_3)} = \frac{CU^2}{12} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

Московский инженерно-физический институт

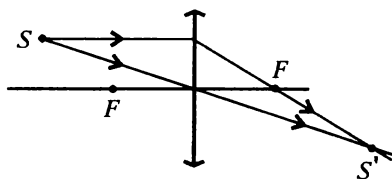


Рис. 38

ФИЗИКА

Вариант 1

1. См. рис.38.

$$2. V_2 = \frac{T_2 \Delta V}{T_1 - T_2}.$$

$$3. v = \frac{2s}{\tau\sqrt{n}}. \quad 4. m_0 = \frac{m_1 m_2 (n+1)}{nm_1 + m_2}. \quad 5. T = \pi \sqrt{\frac{\rho L^2}{\epsilon B l m}}.$$

Вариант 2

$$1. v_{\text{ср}} = \frac{5v_1 v_2}{4v_1 + v_2} = 54,5 \text{ км/ч}. \quad 2. T_1 = \frac{p_1 V_1 T_0}{p_0 V_0}.$$

$$3. P_{\text{max}} = P_3 = \frac{U^2 R_3}{(R_1 + R_2 + R_3)^2} = 833 \text{ Вт}.$$

$$4. \beta = \arccos \frac{v_0 \cos \alpha}{\sqrt{v_0^2 - 2gh}}. \quad 5. \Delta h = \frac{Q^2 (\epsilon^2 - 1)}{8S^2 \epsilon_0 \epsilon^2 \rho g}.$$

Вариант 3

$$1. \text{ Увеличится в } n^2 \text{ раз}. \quad 2. Q = \frac{3}{2} RT(n-1).$$

$$3. \text{ В 3 раза}. \quad 4. \omega = \sqrt{\frac{g}{l \sin \alpha}}.$$

$$5. \text{ Одинаково; } \Delta y = \frac{1}{4\beta}.$$

Московский педагогический государственный университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

$$1. 2. \quad 2. \left[-\frac{1}{3}; 3\right].$$

3. 4. Указание. Рассмотрите случаи $x < 2$ и $x \geq 2$.

$$4. \frac{4}{13}, \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad 5. \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right). \quad 6. 18. \quad 7. 250.$$

8. $\sqrt{2}$. Указание. Рассмотрите сечение пирамиды плоскостью MBD .

Вариант 2

1. 5.
2. (12;16). Указание. Не забудьте об ОДЗ.
3. $\pm \frac{5}{6}\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
4. 420.
5. 8.
6. 1600.
7. 3. Указание. Сначала найдите $E(y)$.
8. 864. Указание. Сначала найдите другую диагональ ромба.

Вариант 3

1. 2.
2. (24;27). Указание. Не забудьте об ОДЗ.
3. $\pm \frac{3}{4}\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
4. 6.
5. 32.
6. 200.
7. -3. Указание. Сначала найдите $E(y)$.
8. 40.

Вариант 4

1. 7.
2. (1;3). Указание. Не забудьте об ОДЗ.
3. $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.
4. 18.
5. -81.
6. 200.
7. -7,4.
8. $\sqrt{13}$. Указание. Сначала найдите другую диагональ ромба.

Задачи устного экзамена

1. (3;5]. Указание. Рассмотрите два случая: $8 - 2x \geq 0$ и $8 - 2x < 0$.
Неравенство можно также решить графически.

2. $0, -\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{N}$.

3. $(\pi; \pi)$, $(-\pi; -\pi)$. Указание. Если сумма двух неотрицательных чисел равна нулю, то они оба равны нулю.

4. $\frac{1}{2}a(3 - a^2)$, при этом $|a| \leq \sqrt{2}$. Указание. Не забудьте об ОДЗ.

5. $(0;1) \cup (1;5]$. Указание. Не забудьте об ОДЗ.

6. $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

7. π .

8. См. рис.39.

9. $12\sqrt{2}$. Указание. Воспользуйтесь теоремой синусов.

10. 27. Указание.

$$\begin{aligned} S_{\triangle AOB} = 2 \cdot S_{\triangle BOC} &\Rightarrow AO = 2 \cdot OC \Rightarrow DO = 2 \cdot OB \Rightarrow \\ &\Rightarrow S_{\triangle AOD} = 2^2 \cdot S_{\triangle BOC} = 2^2 \cdot 3 = 12. \end{aligned}$$

Осталось учесть, что $S_{\triangle DOC} = S_{\triangle AOB}$.

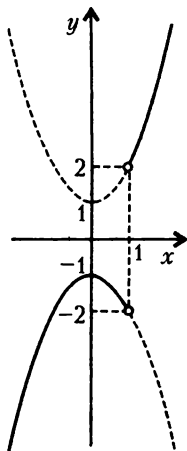


Рис. 39

ФИЗИКА

Вариант 1

1. 1). 2. 3). 3. 1). 4. 2). 5. 3). 6. 2). 7. 1). 8. 2). 9. 2). 10. 3).
11. 3). 12. 3). 13. 2). 14. 3). 15. 2). 16. $l = 0,4$ м. 17. $\Delta t = 1,6$ К.
18. $A_{\text{пол}} = 20$ Дж. 19. $I = 1$ А. 20. $d = 40$ см.

Вариант 2

1. 1). 2. 3). 3. 1). 4. 2). 5. 3). 6. 1). 7. 1). 8. 3). 9. 2). 10. 1).
11. 3). 12. 3). 13. 1). 14. 1). 15. 3). 16. $v = 6$ м/с. 17. $1/3$.
18. $v_{\text{min}} = 350$ м/с. 19. $r = 1$ Ом. 20. $U_m = 10$ В.

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $[0; 1) \cup (3; 5 + 2\sqrt{3})$. ОДЗ: $x \in (-\infty; 1) \cup (3; 9)$. При $x \in (3; 9)$ имеем $\frac{3-x}{1-x} < 1$, поэтому $9-x \geq \left(\frac{3-x}{1-x}\right)^2$, т.е. $(9-x)(1-2x+x^2) \geq 9-6x+x^2$. Отсюда $-x^3+10x^2-13x \geq 0$. Так как в рассматриваемом случае $x > 0$, то получаем $x^2-10x+13 \leq 0$, т.е. $x \in [5-2\sqrt{3}; 5+2\sqrt{3}]$. Так как справедливы неравенства $1 < 5-2\sqrt{3} < 3 < 5+2\sqrt{3} < 9$, то получаем $x \in (3; 5+2\sqrt{3}]$ – решения. При $x \in (-\infty; 1)$ имеем $\frac{3-x}{1-x} > 1$, поэтому $9-x \leq \left(\frac{3-x}{1-x}\right)^2$, т.е. $-x^3+10x^2-13x \leq 0$. Следовательно, $x(x^2-10x+13) \geq 0$. Так как при $x < 1$ выполнено неравенство $x^2-10x+13 > 0$, то $x \in [0; 1)$ – решения.

2. $\frac{\pi}{12} + \pi k$, $\frac{7\pi}{12} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Указание. Так как $\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$ и $\cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}$, то $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = \frac{3}{4} \sin 4x$ и исходное уравнение равносильно такому: $\frac{\sin 4x}{|\cos 2x|} = 1$.

3. $(5; 4)$, $\left(\frac{41-8\sqrt{133}}{33}; -\frac{1+\sqrt{133}}{2}\right)$. Указание. Из первого уравнения получаем $y(x+y) + (x+y)\sqrt{\frac{y}{x+y}} = 42$. Выполнив в полученном

уравнении замену $t = (x + y)\sqrt{\frac{y}{x + y}}$, приходим к уравнению $t^2 + t - 42 = 0$. Откуда либо $(x + y)\sqrt{\frac{y}{x + y}} = -7$, либо $(x + y)\sqrt{\frac{y}{x + y}} = 6$. Итак, исходная система равносильна совокупности из двух систем

$$\begin{cases} y(x + y) = 49, \\ xy - y = 16, \\ x + y < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y(x + y) = 36, \\ xy - y = 16, \\ x + y > 0. \end{cases}$$

Дальнейшее ясно.

4. $AB = \frac{24}{\sqrt{17}}$, $BC = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$, $BE = \frac{24\sqrt{2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}}{\sqrt{17}(3+\sqrt{2})}$. Обозначим $\angle ABM = \alpha$, $\angle CBM = \beta$. По теореме синусов из треугольников ABC и CBM находим $\frac{AB}{\sin \angle AMB} = \frac{AM}{\sin \alpha}$ и $\frac{BC}{\sin \angle CMB} = \frac{MC}{\sin \beta}$. Так как $\angle AMB + \angle CMB = \pi$ и $AM = MC$, то $\sin \angle AMB = \sin \angle CMB$ и $\frac{AB}{BC} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$. Поскольку $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle CBM}$, то $AB \cdot BC \cdot \sin(\alpha + \beta) = AB \cdot BM \cdot \sin \alpha + BC \cdot BM \cdot \sin \beta$. Так как $BC \sin \beta = AB \sin \alpha$, то $AB^2 \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \right) \sin(\alpha + \beta) = 2AB \cdot BM \cdot \sin \alpha$, т.е. $AB = \frac{2BM \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$. Тогда $BC = \frac{2BM \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$. В нашем случае $\alpha = \arctg \frac{1}{4}$, $\beta = \arctg \frac{3}{5}$. Поэтому $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$, $\sin \beta = \frac{3}{\sqrt{34}}$, $\cos \beta = \frac{5}{\sqrt{34}}$, $\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно, $AB = \frac{24}{\sqrt{17}}$, $BC = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$. Далее, биссектриса $BE = \frac{2AB \cdot BC \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)}{AB + BC} = \frac{24\sqrt{2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}}{\sqrt{17}(3+\sqrt{2})}$.

5. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right)$. Указание. Пусть $f(y) = y - \ln y$, тогда $f'(y) = 1 - 1/y$. Таким образом, $f(y)$ убывает на промежутке $(0; 1]$ и возрастает на промежутке $[1; +\infty)$, значит, $f(y) \geq f(1) = 1$, причем равенство достигается только при $y = 1$. Перепишем первое уравнение:

$$(2x^2 - 1)^2 + y - \ln y - 1 = 0.$$

Из сказанного ранее следует, что $2x^2 = 1$, $y = 1$.

6. $\arccos \frac{\sqrt{33}}{16}$, $\arccos \frac{7}{16}$, 3, $\frac{22\sqrt{33}}{23}$. Пусть O – центр ω , T и R – середины ребер AB и CD соответственно; ω_1 – окружность в пересечении ω с гранью $ABCD$ (ω_1 касается отрезков AD и BC в точках M и N и пересекает отрезок AB в точках P и Q), ω_2 – окружность в пересечении ω с гранью ABS (ω_2 касается отрезков AS и BS в точках K и L и пересекает отрезок AB в точках P и Q), O' – центр ω_2 . По условию, SH – высота пирамиды, и H является проекцией O на грань $ABCD$, поэтому H – центр ω_1 . Так как $AD \parallel BC$, то MN – диаметр, перпендикулярный AD . Проекция l прямой SH на грань ABS является высотой треугольника ABS ; кроме того, l содержит O' (так как O' – проекция O на ABS). Поскольку O' равноудалена от сторон AS и BS , то $l = SO'$ – биссектриса треугольника ABS . Отсюда следует, что $\triangle ABS$ – равнобедренный ($AS = BS$) и $l = ST$. Так как $SK = SL$ (отрезки касательных), то $AK = BL$. Грань ABS симметрична относительно ST , поэтому точки P и Q симметричны относительно T . Пусть для определенности P лежит между A и Q . Поскольку $AM = AK = BL = BN$, то $AB \parallel MN$, $ABCD$ – прямоугольник, и пирамида симметрична относительно плоскости STR ; это, в частности, означает, что ω касается SR в некоторой точке U .

Пусть $AT = BT = t$, $AM = AK = BL = BN = a$.

$$1) \text{ Имеем: } AS = 4BL = 4AK = 4a, \quad \frac{AT}{PT} = \frac{AB}{PQ} \Rightarrow PT = QT = \frac{\sqrt{17}t}{\sqrt{33}}.$$

Далее, по теореме о касательной и секущей находим

$$\begin{aligned} a = AK = \sqrt{AP \cdot AQ} &= \sqrt{(AT - PT)(AT + QT)} = \\ &= \sqrt{AT^2 - PT^2} = \sqrt{t^2 - \frac{17t^2}{33}} = \frac{4t}{\sqrt{33}}. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\cos \angle SBA = \cos \angle SAB = \frac{AT}{AS} = \frac{t}{4a} = \frac{\sqrt{33}}{16}.$$

$$\begin{aligned} 2) \quad AH &= \sqrt{MH^2 + AM^2} = \sqrt{AT^2 + AM^2} = \sqrt{t^2 + a^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{33}a}{4}\right)^2 + a^2} = \frac{7a}{4}. \text{ Отсюда} \end{aligned}$$

$$\cos \angle SAH = AH/AS = \left(\frac{7a}{4}\right) / (4a) = \frac{7}{16}.$$

$$\begin{aligned} 3) \text{ Из треугольника } SAH: h = SH &= \sqrt{AS^2 - AH^2} = \sqrt{(4a)^2 - \left(\frac{7a}{4}\right)^2} = \\ &= \frac{3\sqrt{23}a}{4}. \text{ Из подобных треугольников } SOK \text{ и } SAH: \end{aligned}$$

$$\frac{OK}{SK} = \left(\frac{28}{23}\right) / (3a) = \left(\frac{7a}{4}\right) / \left(\frac{3\sqrt{23}a}{4}\right) \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{23}} \Rightarrow h = 3.$$

4) OK и OU – радиусы сферы, поэтому треугольники SOK и SOU равны, значит, $\angle OSK = \angle OSU$, откуда треугольники SRH и SAH равны. Следовательно, $AD = BC = TR = TH + HR = AM + AH = a + \frac{7a}{4} = \frac{11a}{4} = \frac{11}{\sqrt{23}}$. $AB = 2t = \frac{\sqrt{33}a}{2} = \frac{2\sqrt{33}}{\sqrt{23}}$. Объем пирамиды: $V = \frac{1}{3} AD \cdot AB \cdot SH = \frac{22\sqrt{33}}{23}$.

Вариант 2

1. $\pi + 2\pi k$, $\pi - \arctg \sqrt{8} + 2\pi k$, $\pi - \arctg \frac{1}{\sqrt{8}} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. $(-3; 4)$, $\left(\frac{1}{3}; -\frac{8}{3}\right)$, $\left(\frac{29}{12}; -\frac{43}{12}\right)$. *Указание.* Первое уравнение системы можно записать в виде

$$(y + 2x + 2)(y - x + 6) = 0.$$

3. $\left[-\frac{87}{22}; -3\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$. *Указание.* Выполните замену $t = \sqrt{\log_{13+2x}(4x^2 + 8x - 5)}$. Тогда $t + \frac{\sqrt{2}}{t} \leq 1 + \sqrt{2}$, т.е. $t^2 - (1 + \sqrt{2})t + \sqrt{2} \leq 0$. Следовательно, $1 \leq t \leq \sqrt{2}$, т.е. исходное неравенство равносильно системе $1 \leq \log_{13+2x}(4x^2 + 8x - 5) \leq 2$.

4. 1, $\frac{4\sqrt{13}}{3}$. Пусть $BC = 2x$, $AD = 2y$, точки E и F – середины отрезков BC и AD соответственно, M – точка касания окружности с боковой стороной CD , $\angle CDA = \alpha$. Тогда $EF = 4$, $OE = OM = \frac{3}{4}$, $OF = \frac{13}{4}$, $\angle ECO = \alpha$, $\angle MCO = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, $\angle COM = \frac{\alpha}{2}$. Из подобия треугольников OEC и OFA следует, что $\frac{x}{y} = \frac{3}{13}$. Пусть N – проекция точки C на прямую AD . Тогда $ND = y - x = \frac{10}{3}x = CN \operatorname{ctg} \alpha = 4 \operatorname{ctg} \alpha$, т.е. $x = \frac{6}{5} \operatorname{ctg} \alpha$. Далее, из треугольника CMO находим $CM = x = \frac{3}{4} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Следовательно, $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{5}{8} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Пусть $t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, тогда $\frac{1-t^2}{2t} = \frac{5t}{8}$ и $t = \frac{2}{3}$; $x = BE = \frac{1}{2}$, $BC = 1$, $BO = \sqrt{BE^2 + OE^2} = \frac{\sqrt{13}}{4}$, $DO = \frac{y}{x} BO = \frac{13}{3} BO$, $BD = BO + DO = \frac{4\sqrt{13}}{3}$.

5. $a < 0$, $a \geq \frac{6}{13}$. Рассмотрим несколько случаев.

1) $a = 0$. В этом случае уравнение не имеет решений.

2) $a > 0$. В этом случае при всех x выполняется $ax^2 + 4 > 0$. Поэтому уравнение принимает вид $ax^2 + 4 = 3a|x| + a$, или $ax^2 - 3a|x| + 4 - a = 0$. Заметим, что если данное уравнение имеет корни, то по теореме Виета их сумма равна 3, т.е. хотя бы один корень будет положительным (что и требуется, так как данное уравнение квадратное относительно $|x|$). Поэтому дискриминант $D = 9a^2 - 4a(4 - a) = 13a^2 - 16a = a(13a - 16) \geq 0$. Откуда, учитывая условие $a > 0$, получаем $a \geq \frac{16}{13}$.

3) $a < 0$. Заметим, что при $x = \frac{2}{\sqrt{-a}}$ левая часть обращается в 0, а правая больше 0. При $x \rightarrow +\infty$ левая часть становится больше правой. Поэтому при любом $a < 0$ уравнение будет иметь корни.

6. $\frac{18}{\sqrt{35}}, \frac{35}{17}\sqrt{\frac{841}{35}}$.

1) Рассмотрим треугольник SBC . В нем MN — средняя линия, значит, $MN = 1$, $BN = MC = 3$, $SB = SC = 6$.

2) Заметим, что радиус окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, равен $\frac{\sqrt{13}}{2}$. Радиус окружности, описанной около треугольника SBC , найдем из формулы $R = \frac{abc}{4S}$. Площадь треугольника SBC равна $\sqrt{35}$, тогда $R = \frac{6 \cdot 6 \cdot 2}{4\sqrt{35}} = \frac{18}{\sqrt{35}}$. Заметим, что $\frac{18}{\sqrt{35}} > 3 > \frac{\sqrt{13}}{2}$. Радиус сферы будет не меньше наибольшего из радиусов окружностей, описанных около $ABCD$ и SBC . Пусть центр описанной окружности треугольника SBC лежит на перпендикуляре к плоскости ABC , проходящем через точку пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$. В этом случае радиус описанной сферы будет в точности равен радиусу описанной окружности треугольника SBC , т.е. $\frac{18}{\sqrt{35}}$.

3) Допустим, что центр O описанной сферы лежит на расстоянии h от плоскости ABC , тогда $R^2 = \frac{18^2}{35} = OA^2 = h^2 + \frac{13}{4}$, откуда $h^2 = \frac{841}{140}$. Пусть T — середина BC , $ST = \sqrt{35}$. Заметим, что O лежит на ST (так как треугольник SBC — равнобедренный), $OT = ST - SO = ST - R = \sqrt{35} - \frac{18}{\sqrt{35}} = \frac{17}{\sqrt{35}}$. Пусть высота пирамиды равна H , тогда $\frac{H}{h} = \frac{ST}{OT}$, откуда $H = h \cdot \frac{35}{17}$. Площадь $ABCD$ равна 6. Искомый объем $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{35}{17} \cdot \sqrt{\frac{841}{140}} = \frac{35}{17} \sqrt{\frac{841}{35}}$.

1. При движении монеты и горок сохраняются механическая энергия и горизонтальная проекция импульса. Пусть импульс монеты после съезда с первой горки p , тогда такой же по величине импульс будет у первой горки, а также у второй горки, когда монета на нее заедет. Из закона сохранения энергии для всей системы

$$mgh = \frac{p^2}{2m} + \frac{p^2}{2 \cdot 4m}$$

находим p и скорость v монеты на столе:

$$p^2 = \frac{8}{5} m^2 gh, \quad v = \frac{p}{m} = \sqrt{\frac{8}{5}} gh.$$

Из закона сохранения энергии для заезда монеты на вторую горку

$$\frac{p^2}{2m} = mgx + \frac{p^2}{2 \cdot 6m}$$

найдем максимальную высоту подъема монеты:

$$x = \frac{2}{3} h.$$

2. Работа газа за цикл равна площади цикла:

$$A = \frac{1}{2}(p_1 - p_3)(V_2 - V_1) = \frac{1}{2}(p_1 - p_3) \cdot 2V_1 = (p_1 - p_3)V_1.$$

Количество теплоты, подведенное в процессе $3-1$, равно изменению внутренней энергии, так как работа в этом процессе не совершается:

$$Q = \frac{3}{2} \nu RT_1 - \frac{3}{2} \nu RT_3 = \frac{3}{2} p_1 V_1 - \frac{3}{2} p_3 V_3 = \frac{3}{2} (p_1 - p_3) V_1.$$

Искомое отношение равно

$$\frac{A}{Q} = \frac{(p_1 - p_3) V_1}{\frac{3}{2} (p_1 - p_3) V_1} = \frac{2}{3}.$$

3. В конечном состоянии имеем параллельное соединение конденсаторов общей емкостью $2C$ и зарядом $CU_0 + C \cdot 2U_0 = 3CU_0$. По закону сохранения энергии,

$$Q = W_n - W_k = \frac{CU_0^2}{2} + \frac{C(2U_0)^2}{2} - \frac{(3CU_0)^2}{2 \cdot 2C} = \frac{CU_0^2}{4}.$$

4. После замыкания ключа напряжение на резисторе и катушке постоянно и равно \mathcal{E} , поэтому, пока ключ замкнут, через резистор течет постоянный ток $I_R = \frac{\mathcal{E}}{R}$, а ток в катушке определяется условием

$LI' = \mathcal{E}$ и, следовательно, увеличивается по закону $I_L = \frac{\mathcal{E}}{L} t$. За время

τ через резистор и катушку протекут заряды

$$q_R = \frac{\mathcal{E}}{R}\tau \text{ и } q_L = \frac{\mathcal{E}}{L}\tau^2.$$

При размыкании ключа ток через катушку не изменяется. После размыкания ток в цепи определяется уравнением $LI' + IR = 0$, из которого для малого промежутка времени Δt находим

$$LI'\Delta t + I\Delta t R = 0, \text{ или } L\Delta I + R\Delta q = 0.$$

Просуммировав последнее соотношение за все время, найдем связь протекшего заряда с током в момент размыкания и сам этот ток:

$$L(0 - I_0) + Rq_0 = 0, \quad I_0 = q_0 \frac{R}{L}.$$

Вспомнив, что $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{L}\tau$, находим время τ , на которое был замкнут ключ: $\tau = \frac{q_0 R}{\mathcal{E}}$, и заряд, протекший за это время через источник:

$$q = q_L + q_R = q_0 + \frac{q_0^2 R^2}{2\mathcal{E}L}.$$

5. Скорость шарика относительно зеркала равна $3v$ и направлена влево. Скорость изображения относительно зеркала также равна $3v$ и направлена под углом 2α к поверхности стола. Скорость изображения u относительно стола найдем из соотношения

$$u^2 = (3v)^2 + (2v)^2 - 2 \cdot 3v \cdot 2v \cdot \cos 2\alpha = 9v^2 + 4v^2 + 6v^2 = 19v^2,$$

откуда

$$u = \sqrt{19}v \approx 4,4v.$$

Вариант 2

1. Проще всего задача решается, если из трех возможных формул для кинетической энергии

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} = \frac{pv}{2}$$

использовать последнюю. В этом случае закон сохранения энергии принимает вид

$$\frac{pv}{2} = \frac{p(v/3)}{2} + Q,$$

откуда сразу находим

$$Q = \frac{pv}{3} = \frac{2}{3} \frac{pv}{2} = \frac{2}{3} E_0, \text{ и } \frac{Q}{E_0} = \frac{2}{3}.$$

2. Так как

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{T_3}{T_1} = 2 \text{ и } \frac{p_1}{p_4} = \frac{p_2}{p_3} = \frac{V_4}{V_1} = 2,$$

можно ввести удобные обозначения:

$$V_1 = V_2 = V, \quad V_3 = V_4 = 2V, \quad p_4 = p, \quad p_1 = p_3 = 2p, \quad p_2 = 4p.$$

Тогда $2pV = \nu RT$, и

$$A_{23} = \frac{1}{2}(p_2 + p_3)(V_3 - V_2) = \frac{1}{2}(4p + 2p)(2V - V) = 3pV = \frac{3}{2}\nu RT,$$

$$A_{14} = \frac{1}{2}(2p + p)V = \frac{3}{2}pV = \frac{3}{4}\nu RT,$$

$$A = A_{23} - A_{14} = \frac{3}{2}pV = \frac{3}{4}\nu RT.$$

3. Из закона сохранения энергии

$$6k \frac{q^2}{a} = \frac{mv^2}{2} + 3k \frac{q^2}{a}$$

находим

$$\frac{mv^2}{2} = 3k \frac{q^2}{a}, \quad v = \sqrt{\frac{6kq^2}{ma}} = \sqrt{\frac{3q^2}{2\pi\epsilon_0 ma}}.$$

4. При замкнутом ключе работа источника частично расходуется в виде тепла в резисторе, а частично запасается в катушке. После размыкания ключа запасенная в катушке энергия перейдет в тепло. Отсюда получаем

$$\epsilon(q_R + q_L) = Q_1 + Q_2, \quad Q_2 = \frac{LI^2}{2}, \quad I = \sqrt{\frac{2Q_2}{L}}.$$

Пока ключ замкнут выполняется соотношение $LI'_L = q'_R R$, из которого находим связь протекшего за это время через резистор заряда с током в катушке перед размыканием ключа:

$$q_R = \frac{LI}{R} = \frac{\sqrt{2Q_2 L}}{R}.$$

Заряд, протекший через катушку пока ключ был замкнут, равен

$$q_L = q_{\text{общ}} - q_R = \frac{Q_1 + Q_2}{\epsilon} - \frac{\sqrt{2Q_2 L}}{R}.$$

5. Расстояние от мошки до линзы $d = \frac{4}{3}F$. По формуле линзы находим расстояние от линзы до изображения: $f = 4F$ и увеличение:

$$\Gamma = \frac{f}{d} = 3. \text{ Скорость мошки относительно линзы}$$

$$v_{\text{отн}} = 2v + v = 3v = 3 \text{ мм/с}.$$

Скорость изображения относительно линзы $V_{\text{отн}} = \Gamma v_{\text{отн}} = 9v$, а относительно экрана

$$V = V_{\text{отн}} + v = 10v = 10 \text{ мм/с}.$$

1. При неподвижном (или движущемся равномерно) грузе сила натяжения нити равна $T = \frac{mg}{2}$, а условием равновесия цилиндров является равенство нулю суммарного момента всех действующих на них сил: $FL + Tr = TR$. Отсюда находим

$$F = \frac{R-r}{2L} mg = 70 \text{ Н}.$$

Приложим к рукоятке силу kF , где $k = 1,004$. При повороте цилиндров на малый угол α работа всех сил над цилиндрами равна нулю, так как из-за их нулевой массы они не обладают ни кинетической, ни потенциальной энергией:

$$kF \cdot L\alpha + T_1 \cdot r\alpha - T_1 \cdot R\alpha = 0.$$

Отсюда, с учетом выражения для F , находим новую силу натяжения нити: $T_1 = \frac{kmg}{2}$. Теперь ускорение груза равно

$$a = \frac{2T_1 - mg}{m} = (k - 1)g,$$

а его скорость через время t составляет

$$v = at = (k - 1)gt = 0,004gt = 8 \text{ см/с}.$$

2. В начальном состоянии p , T , v , а следовательно, и объемы V обеих частей цилиндра (как и все остальные параметры газа) одинаковы. Конечный объем правой части равен $V/2$, конечное давление находим из уравнения адиабаты: $p = p_0 \cdot 2^{5/3}$. По первому началу термодинамики переданное газу количество теплоты равно изменению внутренней энергии всего газа. Так как давления в двух частях цилиндра всегда равны, можно записать

$$Q = \Delta U = \frac{3}{2}(p - p_0)V_{\text{общ}} = \frac{3}{2}(2^{5/3} - 1)p_0V_{\text{общ}} = 3(\sqrt[3]{32} - 1)\nu RT_0 \approx 16 \text{ кДж}.$$

3. Из закона сохранения импульса находим

$$3mv_2 = mv, \quad v_2 = \frac{v}{3}.$$

Теперь закон сохранения энергии дает

$$k \frac{qq_2}{R} = k \frac{qq_2}{4R} + \frac{mv^2}{2} + \frac{3m(v/3)^2}{2}, \text{ и } q_2 = \frac{8}{9} \frac{mv^2 R}{kq} = \frac{32\pi \epsilon_0 mv^2 R}{9q}.$$

4. Ток I_0 через источник в момент размыкания находится из условия $P = \mathcal{E}I_0$. Тогда напряжение на всех элементах цепи в этот момент равно $U = \mathcal{E} - I_0 r$. Ток через конденсатор перед размыканием

ключа равен

$$I_C = I_0 - I_R = I_0 - \frac{U}{R} = I_0 - \frac{\mathcal{E} - I_0 r}{R} = I_0 \left(1 + \frac{r}{R} \right) - \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{3P}{2\mathcal{E}} - \frac{\mathcal{E}}{2r},$$

а выделившееся количество теплоты равно

$$Q = \frac{CU^2}{2} = \frac{C}{2} \left(\mathcal{E} - \frac{P}{\mathcal{E}} r \right)^2 = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} \left(1 - \frac{Pr}{\mathcal{E}^2} \right)^2.$$

5. Из формулы линзы получаем $\frac{d}{F} - 1 = \frac{1}{\Gamma}$, где Γ – поперечное увеличение. Пусть H , H/k , h – размеры вертолета, его модели, изображения ($k = 200$). Тогда

$$\frac{d_1}{F_1} - 1 = \frac{H}{h}, \quad \frac{d_2}{F_2} - 1 = \frac{H/k}{h}.$$

Отсюда находим

$$d_2 = F_2 \left(\left(\frac{d_1}{F_1} - 1 \right) \frac{1}{k} + 1 \right) \approx F_2 \left(\frac{d_1}{F_1} \frac{1}{k} + 1 \right) = 45 \text{ см}.$$

Заметим, что $\frac{d_1}{F_1} \gg 1$, и это можно было учитывать изначально.

Вариант 4

1. $0,2v = g\tau$, $(2v)^2 = v^2 + 2gh$, $h = \frac{75}{2} g\tau^2$.

2. 1) Пусть в смеси v молей гелия и xv молей кислорода. Тогда масса смеси $m = M_{\text{г}}v + M_{\text{к}}xv$, объем $V = \frac{(v + xv)RT}{p}$ и плотность $\rho = \frac{m}{V} = \frac{M_{\text{г}} + xM_{\text{к}}}{1+x} \frac{p}{RT}$. Из последнего выражения получаем

$$\frac{4 + 32x}{1+x} 10^{-3} = \frac{1 \cdot 8,31 \cdot 300}{10^5} \approx 0,025, \quad \frac{1+8x}{1+x} = \frac{25}{4}, \quad x = 3.$$

2) Первоначально в смеси на каждый моль гелия приходилось 3 моля кислорода. Если удалить $2/3$ кислорода, то на каждый моль гелия будет приходиться 1 моль кислорода. Поэтому, если первоначальную массу смеси принять за $4 + 3 \cdot 32 = 100$ условных единиц, то новая масса смеси составит $4 + 32 = 36$ тех же единиц. Во столько же раз изменится и плотность:

$$\rho_1 = 0,36\rho = 0,36 \text{ кг/м}^3.$$

3. Напряжение на резисторах сопротивлениями R и $2R$ находим из условия $\frac{U^2}{R} = P$, откуда $U = \sqrt{RP} = \sqrt{25 \cdot 49} \text{ В} = 35 \text{ В}$. Ток в резисторе сопротивлением $2R$ равен

$$I_2 = \frac{U}{2R} = \frac{35 \text{ В}}{50 \text{ Ом}} = 0,7 \text{ А}.$$

Ток в резисторе сопротивлением R вдвое больше, т.е. $1,4$ А, общий ток составляет $2,1$ А. В резисторах сопротивлениями $3R$ и $4R$ этот ток делится в отношении $4 : 3$, поэтому ток в резисторе сопротивлением $4R$ равен $\frac{3}{7} \cdot 2,1 \text{ А} = 0,9 \text{ А}$, а выделяющаяся в нем мощность равна $(0,9)^2 \cdot 100 \text{ Вт} = 81 \text{ Вт}$.

4. При замкнутом ключе напряжение на катушке постоянно и равно \mathcal{E} , ток через нее растет со временем линейно: $I = \frac{\mathcal{E}}{L} t$, и за время τ через катушку протечет заряд $q_L = \frac{\mathcal{E}\tau^2}{2L}$. Заряд конденсатора в момент размыкания ключа равен $q_C = q - q_L$. Работа источника равна $\mathcal{E}q$. Из закона сохранения энергии находим количество теплоты, выделившееся до размыкания ключа:

$$Q_1 = \mathcal{E}q - \frac{q_C^2}{2C} - \frac{LI^2}{2} = \mathcal{E}q - \frac{\left(q - \frac{\mathcal{E}\tau^2}{2L}\right)^2}{2C} - \frac{(\mathcal{E}\tau)^2}{2L}.$$

Количество теплоты, выделившееся после размыкания ключа, равно

$$Q_2 = \mathcal{E}q - Q_1 = \frac{q_C^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \frac{\left(q - \frac{\mathcal{E}\tau^2}{2L}\right)^2}{2C} + \frac{(\mathcal{E}\tau)^2}{2L}.$$

5. Пусть точка B находится на расстоянии $2F + x$ от линзы (знак x пока неизвестен, сторона квадрата $l = |x|$). Из формул $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$ и $\Gamma = \frac{f}{d}$ находим $f = \frac{dF}{d - F}$ и $\Gamma = \frac{F}{d - F}$ (формула поперечного увеличения). Сторона AD изображается в натуральную величину, а сторона BC — с увеличением $\Gamma = \frac{F}{F + x}$. Найдём увеличение стороны AB . Расстояние $A'B'$ равно

$$2F - \frac{(2F + x)F}{F + x} = \frac{2F^2 + 2Fx - 2F^2 - Fx}{F + x} = \frac{Fx}{F + x} = \Gamma x,$$

т.е. увеличение стороны AB тоже равно Γ . Изображение $A'B'C'D'$ является трапецией, площадь которой равна

$$\frac{1}{2}(A'D' + B'C')A'B' = \frac{1}{2}(\Gamma l + l)\Gamma l = \frac{1}{2}(\Gamma + 1)\Gamma l^2.$$

Из уравнения $\frac{1}{2}(\Gamma + 1)\Gamma = \frac{3}{8}$ находим $\Gamma = \frac{1}{2}$. Второй корень отрицателен и соответствует мнимому изображению отрезка BC .

Решение будет совсем коротким, если воспользоваться известным фактом, что продольное увеличение отрезка равно произведению поперечных увеличений на его концах.

ФИЗИКА

Вариант 1

$$1. F_{\text{упр}} = \frac{m(a_2 - a_1)}{2}; \mu = \frac{a_1 + a_2}{2g}. \quad 2. n = \frac{3}{2}.$$

$$3. \text{ Из соотношений } U = RI_0, \quad C = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{q}{U}, \quad r = \frac{\rho d}{S} = \frac{\epsilon_0 \rho U}{q},$$

$$i = \frac{U}{r} = \frac{q}{\epsilon_0 \rho} \text{ находим } I = i + \frac{U}{R} = \frac{q}{\epsilon_0 \rho} + I_0.$$

$$4. \text{ Положим } p = 10^5 \text{ Па}, \quad V = 60 \text{ м}^3, \quad t_1 = 30^\circ \text{C}, \quad t_2 = 20^\circ \text{C}. \text{ Тогда}$$

$$m = \frac{MpV(T_1 - T_2)}{RT_1 T_2} = 2,4 \text{ кг}.$$

5. Исходно уровень воды в трубке совпадает с ее уровнем в бутылке. При повышении давления воздуха в бутылке вода заполняет верхнюю часть трубки и во внешней части трубки опускается ниже уровня в бутылке. При этом на одной горизонтали давление воды в бутылке оказывается выше давления во внешней части трубки. Из-за такого перепада давлений вода и вытекает. Когда мы перестаем дуть, то в заполненной водой трубке по-прежнему остается соответствующий перепад давлений, поэтому вода продолжает вытекать, пока ее уровень в бутылке не станет ниже входного отверстия трубки.

Вариант 2

$$1. r = \frac{R}{2}. \quad 2. \Delta p = \rho_0 g h + \frac{mg(1 - \rho_0/\rho)}{S}.$$

$$3. \text{ Внутренняя энергия газа увеличивается на } \Delta U = \frac{(3/2)mR(T - T_0)}{M}.$$

Тепло от нагревателя идет на приращение внутренней энергии и на работу газа: $Q = \Delta U + A$. Так как $A = pV - p_0 V_0 = \frac{mRT}{M} - \frac{mRT_0}{M}$, то $Q = \frac{(5/2)mR(T - T_0)}{M}$. Тогда тепловая мощность равна $N = \frac{Q}{t} = \frac{(5/2)mR(T - T_0)}{Mt}$.

$$4. \text{ На большом расстоянии } f \approx \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R^2}, \text{ при малом зазоре } F = qE,$$

где $E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r^2}$. Следовательно, $\frac{F}{f} \approx \frac{2R^2}{r^2} \approx 2 \cdot 10^4$, если $r \approx 1,5 \text{ см}$, $R \approx 150 \text{ см}$.

5. При исходном положении линзы пятно на экране образуется расходящимся после точки пересечения пучком света (рис.40, слева). Соответственно, перекрытие верхней половины линзы приводит к тому,

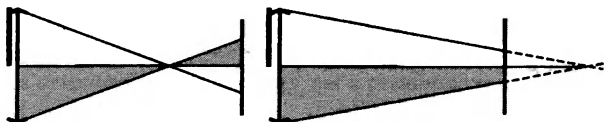


Рис. 40

что свет не попадает в нижний полукруг. При приближении линзы к источнику точка пересечения лучей оказывается за экраном, и пятно образуется сходящимся пучком (рис.40, справа). Тогда перекрытие линзы сверху приводит к тому, что свет не попадает в верхний полукруг.

Вариант 3

1. $n = \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi/2}$.

2. Число вышедших молей пара равно числу вошедших молей воздуха. Отсюда $m_0 = \frac{M_0 m}{M - M_0} = \frac{18}{11} m = \frac{18}{11} \text{ г}$.

3. Из условия равновесия нижнего кирпича вдоль наклонной плоскости: $\mu N = mg \sin \alpha$ и из условия равновесия верхнего кирпича по вертикали: $N(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) = mg$ получаем $\mu = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$.

4. $\Delta N = 4\pi m v \omega = \frac{8\pi m v}{T} \approx (1 - 0,5) \text{ Н}$, где $T = 1 \text{ сутки} = 86400 \text{ с}$, $v = (10 - 30) \text{ м/с}$, $m = (60 - 100) \text{ кг}$.

5. В первом случае магнитное поле катушки перпендикулярно магнитному полю Земли, и стрелка устанавливается по суммарному полю, отклоняясь от направления юг-север. Во втором случае магнитные поля Земли и катушки совпадают по направлению, и стрелка остается в равновесии.

Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $[-6; -1) \cup (3; +\infty)$. 2. 2 корня. 3. 40 см. 4. 4. 5. -1; 0; 1; 2.
6. 10 ч. 7. $1 \leq x \leq 5$. 8. 7. 9. $m \in \left(\frac{20}{13}; 5\right)$.

Вариант 2

1. 3. 2. $\left(-\infty; 2\frac{8}{9}\right)$. 3. 2 решения (-30° и 150°).
4. $\left(-\infty; -\frac{7}{3}\right) \cup \left(-\frac{7}{3}; -2\right] \cup \left\{\frac{3}{2}\right\} \cup \left(\frac{14}{5}; +\infty\right)$. 5. 20 см^2 .

6. $\frac{2}{3}$. 7. -6; -5; -4; -3. 8. 21. 9. Нет решений, если $a < -1$; 2 решения, если $a = -1$; 4 решения, если $-1 < a < 0$; 3 решения, если $a = 0$; 2 решения, если $a > 0$.

**Российский государственный университет нефти и газа
им. И.М.Губкина**

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. -2. 2. 7. 3. 48. 4. -0,5. 5. 12. 6. 4. 7. 0,25. 8. -80.

9. -24. Пусть $f(x) = (x+a)^3(x-5) + 16875$, тогда $f'(x) = (x+a)^2(4x-15+a)$, поэтому $f(x)$ имеет единственную точку экстремума $x_0 = \frac{15-a}{4}$ и в этой точке достигается минимум функции, равный

$$f(x_0) = 16875 - \frac{27}{256}(a+5)^4.$$

Всюду слева от точки x_0 функция $y = f(x)$ убывает, справа – возрастает, так что найденное нами значение $f(x_0)$ будет наименьшим значением функции $y = f(x)$ на всей числовой прямой. Функция будет положительной на всей прямой тогда и только тогда, когда это значение положительно. Отсюда получается неравенство $(a+5)^4 < 625 \cdot 256$, равносильное неравенству $|a+5| < 20$, т.е. $a \in (-25; 15)$.

10. 3. Ясно, что $x > 0$. Прологарифмировав обе части уравнения по основанию 9, получаем квадратное уравнение $4(\log_9 x)^2 - 2\log_9 x - 0,5 = 0$ с положительным дискриминантом. Если $\log_9 x_1$ и $\log_9 x_2$ – его корни, то по теореме Виета $\log_9 x_1 + \log_9 x_2 = 0,5$, так что $x_1 x_2 = 3$.

11. 38. Пусть ABC – данный треугольник (рис.41), $AB = c = 17$, $\angle ABC = \alpha$, O – центр описанной окружности, тогда $OA = OB = c/2$. Центр второй окружности равноудален от обоих катетов и потому лежит на биссектрисе $\angle ACB$, пусть этот центр находится в точке M . Проведем $MK, ON \parallel BC$, отрезок OM продолжим до пересечения с окружностью в точке P . Тогда радиусы второй окружности суть $MK = MP = \rho = 4$. Прямоугольная трапеция $OMKN$ имеет следующие длины сторон: $OM = (c/2) - \rho$, $ON = (c/2)\cos \alpha$, $MK = \rho$, и, так как $CK = MK = \rho$, то $NK = (c/2)\sin \alpha - \rho$. Эти длины мы подставим в соотношение $(MK - ON)^2 + NK^2 = OM^2$. В результате получаем, что

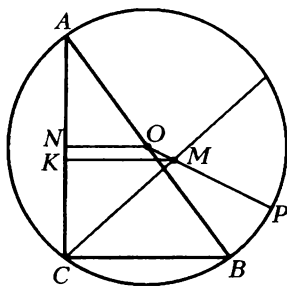


Рис. 41

В результате получаем, что

$\rho = c(\cos \alpha + \sin \alpha - 1)$, откуда $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{\rho}{c} + 1$ и (после возведения обеих частей в квадрат) $\sin 2\alpha = \left(\frac{\rho}{c}\right)^2 + 2\frac{\rho}{c}$. Искомая площадь треугольника есть $S = \frac{c^2}{4} \sin 2\alpha$, и подстановка сюда предыдущего результата дает $S = \frac{\rho^2 + 2\rho c}{4}$. При $\rho = 4$ и $c = 17$ получаем $S = 38$.

12. 2. Пусть $SABC$ – данная пирамида, O – центр основания, K – середина стороны AC (рис.42). Центр сферы, проходящей через середины всех сторон основания, лежит на прямой SO . Если эта сфера касается описанной в точке S , то пусть P – ее центр. Тогда $PK = PS = \rho$ – ее радиусы. Если $AC = a$, $SO = h$, то из $\triangle POK$

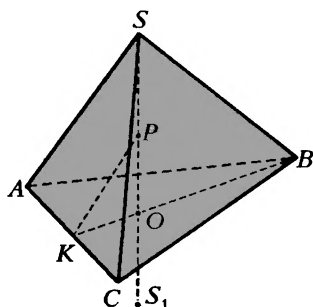


Рис. 42

получаем $\rho^2 = (h - \rho)^2 + \left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2$, или $\rho = \frac{h}{2} + \frac{a^2}{24h}$. По условию $\angle SBO = \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{6}$. Теперь $h = \frac{a}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \alpha$ и $\rho = \frac{a\sqrt{3}}{24}(4\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)$.

Обозначим через S_1 вторую точку пересечения прямой SO с описанной около пирамиды сферой, именно в ней касается описанной вторая сфера. Тогда все приведенные выше вычисления применимы и к пирамиде S_1ABC , при этом роль угла α играет $\angle S_1BO = 90^\circ - \alpha$. В результате получаем выражение для радиуса второй сферы:

$$\rho_1 = \frac{a\sqrt{3}}{24}(4\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha). \text{ Отношение этих радиусов есть } \frac{\rho}{\rho_1} = \frac{4\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha + 4},$$

при $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{6}$ находим $\frac{\rho}{\rho_1} = 2,5$. Получается, что для рассматриваемого случая $\rho > \rho_1$, так что $\rho = 5$ и $\rho_1 = 2$.

Вариант 2

1. 0,1. 2. 7. 3. 0,3. 4. 11. 5. 0. 6. 0,3. 7. -1. 8. 35.

9. 3. Очевидно, $x = 0$ не является корнем данного уравнения,

поэтому приведем уравнение к виду $x + \frac{256}{27x^2} = a$ и при $x \neq 0$ рассмотрим функцию $f(x) = x + \frac{256}{27x^2}$. Тогда $f'(x) = 1 - \frac{512}{27x^3} =$

$$= \frac{(3x - 8)(9x^2 - 48x + 64)}{27x^3}, \text{ и, поскольку неполный квадрат в ноль не}$$

обращается, на промежутке $\left(0; \frac{8}{3}\right)$ функция убывает, а при $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$ — возрастает. При $x = \frac{8}{3}$ она достигает минимума, равного 4, кроме того, она обращается в ноль при $x = -\frac{8}{3}$. При $x < -\frac{8}{3}$ будет $f(x) < 0$, при $x > -\frac{8}{3}$

будет $f(x) > 0$. В итоге эскиз графика функции $y = f(x)$ может иметь только вид, изображенный на рисунке 43. Горизонтальная прямая $y = a$ пересекает этот график в одной точке при условии, что $a < 4$. Наибольшее целое число, удовлетворяющее этому условию, есть $a = 3$.

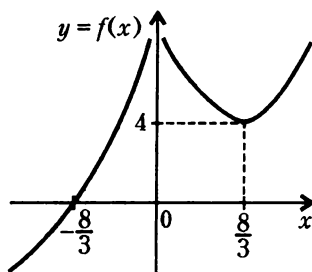


Рис. 43

10. 0,8. Ясно, что $x > 0$, $x \neq 1$. Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 4, обозначив при этом $\log_4 5 = a$. Получим

$$\log_4 x - (2 + a) = \frac{(a-1)(2a+1)}{\log_4 x}.$$

Это уравнение

приводится к квадратному с корнями $\log_4 x_1 = 2a+1$ и $\log_4 x_2 = 1-a$. Поэтому $x_1 = 100$ и $x_2 = 0,8$. Меньший корень — естественно, второй.

11. 2. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 44), в котором $AB = BC = a$ и $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle LAC = \alpha/2$, $\angle KCA = 90^\circ - (\alpha/2)$ и $\angle KCL = (3\alpha/2) - 90^\circ$. Далее, $AC = 2a \cos \alpha$, $AK = 2a \cos \alpha \cos(\alpha/2)$, $KC = 2a \cos \alpha \sin(\alpha/2)$.

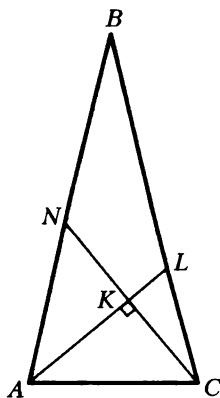


Рис. 44

Из $\triangle KLC$ получаем, что $KL = KC \operatorname{tg}((3\alpha/2) - 90^\circ) = -KC \operatorname{ctg}(3\alpha/2)$. Теперь можно выразить искомое отношение:

$$\frac{AK}{KL} = \frac{2a \cos \alpha \cos(\alpha/2) \sin(3\alpha/2)}{-2a \cos \alpha \sin(\alpha/2) \cos(3\alpha/2)} = \frac{(3 \sin(\alpha/2) - 4 \sin^3(\alpha/2)) \cos(\alpha/2)}{(3 \cos(\alpha/2) - 4 \cos^3(\alpha/2)) \sin(\alpha/2)},$$

или

$$\frac{AK}{KL} = \frac{3 - 4 \sin^2(\alpha/2)}{3 - 4 \cos^2(\alpha/2)} = \frac{1 + 2 \cos \alpha}{1 - 2 \cos \alpha}.$$

Для того чтобы выразить заданное в условии задачи отношение через α , используем сначала теорему синусов в $\triangle ANC$: $AN =$

$= NC \frac{\sin(90^\circ - (\alpha/2))}{\sin \alpha}$, а затем эту же теорему в $\triangle NBC$:
 $NB = NC \frac{\sin(90^\circ - (3\alpha/2))}{\sin(180^\circ - 2\alpha)}$. Отсюда после простых преобразований получается, что $\frac{AN}{NB} = \frac{2 \cos \alpha}{3 - 4 \cos^2(\alpha/2)} = \frac{2 \cos \alpha}{1 - 2 \cos \alpha}$. По условию это отношение равно 0,5, поэтому $\cos \alpha = 1/6$ и $AK : KL = 2$.

12. 16. Используем рисунок 42 и решение задачи 12 из варианта 1. В этом решении найдено, что радиусы двух сфер определяются равенствами $\rho = \frac{a\sqrt{3}}{24}(4\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)$ и $\rho_1 = \frac{a\sqrt{3}}{24}(4\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha)$. При этом радиус сферы, описанной около пирамиды, есть $R = \frac{a}{\sqrt{3} \sin 2\alpha}$. Подставляя $a = 2R\sqrt{3} \sin \alpha \cos \alpha$, получаем, что $\rho = \frac{R}{4} \sin \alpha \cos \alpha \cdot (4\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)$ и $\rho_1 = \frac{R}{4} \sin \alpha \cos \alpha \cdot (4\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha)$. Складывая эти два равенства, получаем, что $\rho + \rho_1 = \frac{5R}{4}$, так что при радиусах сфер 13 и 7 (какой именно из них равен 13 — не важно) находим, что $R = 16$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $h = 175$ м.
2. $F = 20$ Н.
3. $Q = 12$ Дж.
4. $p = 286$ кПа.
5. На 25%.
6. $R = 12$ Ом.

7. $l = 11$ см.
8. $D = 8$ дптр.

9. Запишем второй закон Ньютона для каждого груза в проекции на ось Y (рис.45):

$$T - \frac{2m}{3}g = \frac{2m}{3}a,$$

$$T - mg = -ma,$$

откуда находим $a = 0,2g$. Поскольку отделившийся кусок падает с ускорением g , то расстояние между этим куском и грузом, от которого он отделился, в момент времени t равно

$$s = |s_1| + |s_2| = \frac{at^2}{2} + \frac{gt^2}{2} = 0,6t^2 = 1,5 \text{ м} =$$

$$= 150 \text{ см.}$$

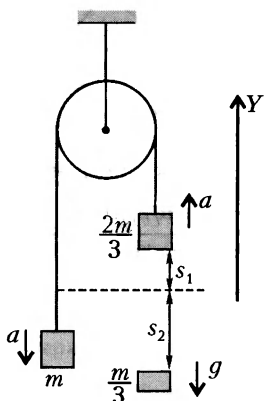


Рис. 45

10. Запишем правило моментов относительно точки касания шара с плоскостью (рис.46):

$$mg \cdot d_1 - T d_2 = 0.$$

Из рисунка видно, что $d_1 = R \sin \alpha$, а $d_2 = AO \sin \alpha = l \sin \alpha$ (касательные, проведенные из одной точки, имеют одинаковую длину). Получаем

$$T = mg \frac{R}{l} = 14 \text{ Н.}$$

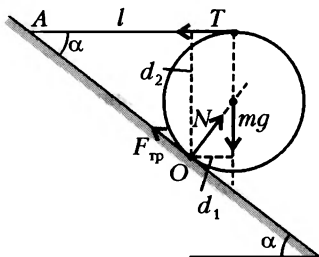


Рис. 46

11. Запишем условие механического равновесия поршня в начальном состоянии (при температуре $T_1 = 300 \text{ К}$):

$$p_1 S = mg$$

и подставим в уравнение Менделеева–Клапейрона

$$p_1 (Sh_1) = \nu RT_1.$$

Получим

$$mgh_1 = \nu RT_1.$$

Точно так же для конечного состояния запишем

$$mgh_3 = \nu RT_3,$$

где T_3 – искомая температура.

После быстрого нагрева от температуры T_1 до температуры $T_2 = 400 \text{ К}$ механическое равновесие поршня нарушается, и он приходит в движение. Система «газ + поршень» больше не получает тепла, следовательно, полная энергия этой системы (механическая + внутренняя) сохраняется:

$$mgh_1 + \frac{3}{2} \nu RT_2 = mgh_3 + \frac{3}{2} \nu RT_3$$

(мы учли, что $h_2 = h_1$). Подставляя полученные выше соотношения, получим

$$T_1 + \frac{3}{2} T_2 = \frac{5}{2} T_3,$$

откуда

$$T_3 = \frac{2T_1 + 3T_2}{5} = 360 \text{ К.}$$

12. Запишем второй закон Ньютона для перемычки при ее установившемся движении (т.е. когда ускорение обращается в ноль):

$$mg - F_A = 0,$$

где сила Ампера равна

$$F_A = IBl.$$

Ток в контуре возникает под действием ЭДС индукции \mathcal{E} :

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

ЭДС индукции в движущемся проводнике вычисляется по формуле

$$\mathcal{E} = Bvl.$$

Выразив из этих уравнений скорость переключки, получим

$$v = \frac{mgR}{B^2 l^2} = 4 \text{ м/с}.$$

Вариант 2

1. $F = 3 \text{ Н}$. 2. $\Delta p = 9 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$. 3. $m = 1 \text{ кг}$.

4. $M = 32 \text{ кг/кмоль}$. 5. $U = 24 \text{ В}$. 6. $R = 8 \text{ см}$.

7. В 3 раза. 8. $d = 40 \text{ см}$.

9. Направим ось X горизонтально, а ось Y вертикально вниз (рис.47). Зависимость координат от времени выражается формулами

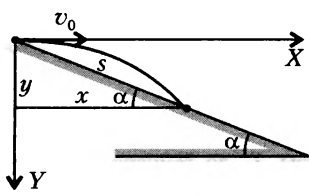


Рис. 47

$$x = v_0 t, \quad y = \frac{gt^2}{2}.$$

Момент падения характеризуется условием

$$\frac{y}{x} = \tan \alpha.$$

Получаем

$$t = \frac{2v_0 \tan \alpha}{g}.$$

Искомое расстояние равно

$$s = \frac{x}{\cos \alpha} = \frac{v_0 t}{\cos \alpha} = \frac{2v_0^2 \tan \alpha}{g \cos \alpha} = 120 \text{ м}.$$

10. Предположим, что первый брусок под действием искомой силы F проехал расстояние x и остановился как раз в тот момент, когда второй брусок начинает смещаться под действием силы упругости пружины. Тогда можно записать

$$kx = \mu_2 m_2 g.$$

Закон сохранения энергии с учетом работы искомой силы F и силы трения, действующей на первый брусок, имеет вид

$$Fx - \mu_1 m_1 g x = \frac{kx^2}{2} - 0.$$

Получаем

$$F = \mu_1 m_1 g + \frac{\mu_2 m_2 g}{2} = 18 \text{ Н}.$$

11. Давление влажного воздуха равно сумме парциальных давлений водяного пара и сухого воздуха. В начальном состоянии

$$p_1 = p_{n1} + p_{в1} = 0,4p_n + p_{в1},$$

откуда $p_{в1} = 36$ кПа. После введения в сосуд воды и уменьшения его объема в два раза давление сухого воздуха в два раза увеличится:

$$p_{в2}V_2 = p_{в1}V_1, \quad p_{в2} = 2p_{в1},$$

а давление пара в конечном состоянии будет равно сумме давления того пара, который был в начальном состоянии, и давления испарившейся воды:

$$p_{п2} = 2p_{п1} + p_{исп} = 0,8p_n + p_{исп}.$$

Вычислим давление испарившейся воды в предположении, что испарилась вся вода, а затем проверим, так ли это:

$$p_{исп} \frac{V}{2} = \frac{m}{M}RT, \quad p_{исп} = 20 \text{ кПа}.$$

Получаем, что конечное давление пара равно 68 кПа, т.е. больше p_n . Следовательно, вода испарится только частично, и конечное давление будет равно давлению насыщенного пара p_n .

Итак, конечное давление влажного воздуха составит

$$p_2 = p_{п2} + p_{в2} = p_n + 2p_{в1} = 132 \text{ кПа}.$$

12. Зависимость полезной мощности от силы тока имеет вид

$$P = \varepsilon I - I^2 r.$$

Максимум этого выражения достигается при $I = \varepsilon/(2r)$ и равен

$$P_{\max} = \frac{\varepsilon^2}{4r}.$$

ЭДС источника ε и его внутреннее сопротивление r найдем из уравнений

$$P_1 = \varepsilon I_1 - I_1^2 r,$$

$$P_2 = \varepsilon I_2 - I_2^2 r.$$

Подставляя числа, получим $r = 0,5$ Ом, $\varepsilon = 6$ В. Отсюда находим

$$P_{\max} = 18 \text{ Вт}.$$

**Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет**

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $-b^2$. 2. -1 . 3. 21. 4. $\{1; 2\}$. 5. $(-1; 2) \cup [3; +\infty)$. 6. 1. 7. $1/4$. 8. \emptyset .
9. $[-1; \sqrt{3}/2)$. 10. $(-1; 0) \cup (0; 2)$. 11. $1/9$. 12. $\{0; \log_2 3\}$. 13. $(\log_2 3; 2]$.

14. $\{(1; 2); (2; 1)\}$. 15. 27. 16. $1/2$. 17. $y = 0$; $y = 2x - 1$. 18. 26. 19. 9. 20. $(-\infty; 0) \cup \{1\}$.

Вариант 2

1. 1. 2. $2/t$. 3. 2. 4. 4. 5. 9. 6. 3. 7. $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}$, $(-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.
8. $\frac{5\pi}{2} - 7$. 9. $[-3; 2)$. 10. $[-2; -\sqrt{3}) \cup (0; \sqrt{3})$. 11. $[1; 3]$.
12. $(-\infty; 2] \cup [10; +\infty)$. 13. $\pi/3$. 14. $(2; -1)$. 15. $(5; 4)$. 16. 50; 110.
17. $1/5$; $4/5$. 18. 8. 19. 9. 20. $[-3; 0] \cup \{1\}$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Б). 2. В). 3. Д). 4. Г). 5. Б). 6. В). 7. В). 8. А). 9. Д). 10. Д).

11. $s = \frac{vt}{2} = 1667$ м. 12. $l = x_1 \frac{m_1 + m_2}{m_2} = 0,7$ м.

13. $\mu = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,58$. 14. $v_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} v = 0,86v$.

15. $A = \frac{m}{M} R \Delta T = 86$ кДж. 16. $C = \frac{\epsilon_0 S (2\epsilon + 1)}{2d(\epsilon + 1)}$.

17. $j = \frac{4P}{\pi d^2 U} = 2,2 \cdot 10^9$ А/м². 18. $n = \frac{U}{\epsilon - \frac{Pr}{U}} = 67$.

19. $T = \frac{\pi v_0}{g} \sqrt{\frac{2}{1 - \cos \frac{\pi}{6}}} = 6,2$ с. 20. $H = h \frac{1}{Dd - 1} = 8$ см.

Вариант 2

1. Б). 2. А). 3. Б). 4. Г). 5. А). 6. Е). 7. Б). 8. Д). 9. Г). 10. Б).

11. $t_3 = \frac{t_1 t_2}{2t_2 - t_1} = 6$ мин. 12. $\rho = \frac{3g_0}{4\pi GR}$.

13. $v_0 = \sqrt{\frac{2F_{\text{top}} S}{m}} = 10$ м/с. 14. $F = \frac{mg}{2} \cos \alpha = 173$ Н.

15. $\nu = \frac{2}{3} \frac{U}{RT} = 4$ моль.

16. $v_1 = \sqrt{\frac{8}{3} \frac{kq^2}{mL}}$, $v_2 = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{kq^2}{mL}}$, где $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

17. $n = \frac{I_{\text{max}} r}{\epsilon} = 9$, $Q = \frac{I_{\text{max}}^2 r \Delta t}{4} = 486$ Дж. 18. $I \geq \frac{2T_{\text{np}} - mg}{BL} = 3$ А.

19. $\Gamma_2 = \Gamma_1 = 3$, изображение мнимое.

20. $A_{\text{вых}} = \frac{hc}{3} \frac{4\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} = 3,4 \cdot 10^{-19}$ Дж = 2,1 эВ.

Санкт-Петербургский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\frac{30-8d}{3-2d}$ минут; задача имеет решение при $d \in \left[\frac{5}{6}; \frac{5}{4}\right)$. Пусть v_1 и v_2 – скорости бегунов, O – точка старта, A_1 и A_2 – места первой и второй встреч бегунов соответственно, B – точка разворота второго бегуна. На путь OA_1 бегуны потратили $\frac{d}{v_1}$ и $\frac{d}{v_2}$ минут, откуда $\frac{d}{v_1} = \frac{d}{v_2} + 5 \Leftrightarrow d(v_2 - v_1) = 5v_1v_2$. Кроме того, $3 = A_1B = A_1A_2 + A_2B = \left(\frac{3}{v_2} + 6\right)v_1 + 4v_2$. Тогда

$$\begin{cases} d(v_2 - v_1) = 5v_1v_2, \\ 3v_2 = 3v_1 + 6v_1v_2 + 4v_2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d(v_2 - v_1) = 5v_1v_2, \\ 3(v_2 - v_1) = 2v_2(2v_2 + 3v_1). \end{cases}$$

Поделив первое уравнение на второе, получим $2d(2v_2 + 3v_1) = 15v_1 \Leftrightarrow v_2 = \frac{15-6d}{4d}v_1$. Из первого уравнения $\frac{15-10d}{4}v_1 = 5v_1v_2$, откуда $v_2 = \frac{3-2d}{4}$ и $v_1 = d \frac{3-2d}{15-6d} \frac{\text{км}}{\text{мин}}$. Время второго бегуна равно $\frac{d+3}{v_2} + 6 = \frac{30-8d}{3-2d}$ мин.

Скорости v_1 и v_2 положительны при условии $d < \frac{3}{2}$. Кроме того,

$v_2 \leq \frac{1}{3} \frac{\text{км}}{\text{мин}}$ в случае $d \geq \frac{5}{6}$, а $v_1 \leq \frac{1}{3} \frac{\text{км}}{\text{мин}}$ при всех $d > 0$. Наконец, $\frac{30-8d}{3-2d} + 5 < 45 \Leftrightarrow d < \frac{5}{4}$. Учитывая все эти ограничения, получаем ответ.

2. $\{-1\} \cup [1; 2]$. Указание. Неравенство равносильно совокупности

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 3} \leq x + 1 \\ \sqrt{3x^2 - 3} \leq -x - 5. \end{cases}$$

$$3. x \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup \left[\frac{1}{3}; 1\right). \text{ Указание. } x \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty).$$

На ОДЗ неравенство равносильно

$$\begin{aligned} 2\log_{x^2}(1+27x^3) &\leq \log_{x^2}(1+3x)^2 \Leftrightarrow \log_{x^2}(1+27x^3) \leq \\ &\leq \log_{x^2}(1+3x) \Leftrightarrow (x^2-1)(27x^3-3x) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x-1)x \leq 0. \end{aligned}$$

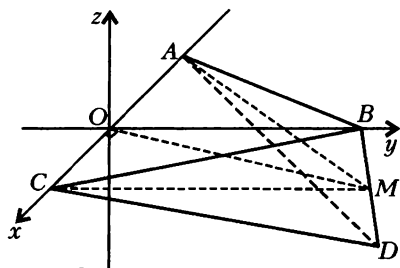


Рис. 48

Применяя метод интервалов и учитывая ОДЗ, получаем ответ.

$$4. 2 : 3 \text{ или } 8 : 7.$$

$$\text{Пусть } t = \frac{BM}{BD} \text{ (рис.48).}$$

Тогда $\overrightarrow{BD} = (0; -15; 15)$ и $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + t \cdot \overrightarrow{BD} = (0; 14 - 15t; 15t)$. Заметим, что отрезок OM лежит в плоскости Oyz , а отрезок AC перпендикулярен

Oyz . Поэтому $AC \perp OM$, т.е. OM – высота треугольника MAC . Тогда

$$\frac{1}{2} AC \cdot OM = 45 \Leftrightarrow 9\sqrt{(14-15t)^2 + (15t)^2} = 90, \text{ откуда } t = \frac{6}{15} \text{ или}$$

$$t = \frac{8}{15}. \text{ Так как } BM : DM = t : (1-t), \text{ из этих равенств вытекает ответ.}$$

$$5. x = 0, x = 2 - \sqrt{5}. \text{ Уравнение равносильно такому:}$$

$$\arctg \frac{x(2-x)}{5} = \frac{\pi}{4} - \arctg(1-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x(2-x)}{5} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \arctg(1-x)\right), \\ \frac{\pi}{4} - \arctg(1-x) \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x(2-x)}{5} = \frac{1-(1-x)}{1+(1-x)}, \\ \arctg(1-x) > -\frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(2-x)^2 = 5x, \\ \arctg(x-1) < \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 4x - 1) = 0, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 - \sqrt{5}. \end{cases}$$

Вариант 2

$$1. \left(\frac{5}{24}; \frac{120}{121}\right).$$

2. Насосы работали 8 и 6 часов соответственно; второй насос в два раза мощнее первого.

$$3. \left[\frac{3}{2}; 5\right]. 4. 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k, -\arcsin \frac{3}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. 5. \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Приложение к журналу «Квант» №6/2008

Задачи вступительных экзаменов

Составители *А.А.Егоров, В.А.Тихомирова*

Редакторы *А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова*

Обложка *А.Е.Пацхверия*

Макет и компьютерная верстка *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа *Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева*

ИБ № 96

Формат 84×108 1/32. Бум. офсетная. Гарнитура кудряшевская

Печать офсетная. Объем 5,5 печ.л. Тираж 3000 экз.

Заказ № 4777.

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А, «Квант»

Тел.: (495)930-56-48, e-mail: admin@kvant.info

Отпечатано в ОАО Ордена Трудового Красного Знамени

«Чеховский полиграфический комбинат»

142300 г.Чехов Московской области

Сайт: www.chpk.ru.

E-mail: marketing@chpk.ru

Факс: 8(49672)6-25-36

Тел.: 8(499) 270-73-59

**Вышли из печати Приложения к журналу «Квант» –
книги серии «Библиотечка «Квант» (начиная с 2005 года)**

91. *А.Л.Стасенко*. Физические основы полета
92. Задачник «Кванта». Математика. Часть 1. Под редакцией
Н.Б.Васильева
93. Математические турниры имени А.П.Савина
94. *В.И.Белотелов, А.К.Звездин*. Фотонные кристаллы и дру-
гие метаматериалы
95. Задачник «Кванта». Математика. Часть 2. Под редакцией
Н.Б.Васильева
96. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Физика
97. *А.А.Егоров, Ж.М.Раббот*. Олимпиады «Интеллектуальный
марафон». Математика
98. *К.Ю.Богданов*. Прогулки с физикой
99. *П.В.Блиох*. Радиоволны на земле и в космосе
100. *Н.Б.Васильев, А.П.Савин, А.А.Егоров*. Избранные олим-
пиадные задачи. Математика
101. У истоков моей судьбы...
102. *А.В.Спивак*. Арифметика
103. *Я.А.Сморodinский*. Температура
104. *А.Н.Васильев*. История науки в коллекции монет
105. *И.Ф.Акулич*. Королевские прогулки
106. Исаак Константинович Кикоин в жизни и в «Кванте»
107. *Г.С.Голицын*. Макро- и микромиры и гармония
108. *П.С.Александров*. Введение в теорию групп
109. *А.В.Спивак*. Арифметика-2



Задачи
вступительных
экзаменов

ПРИЛОЖЕНИЕ К ЖУРНАЛУ КВАНТ

№6/2008